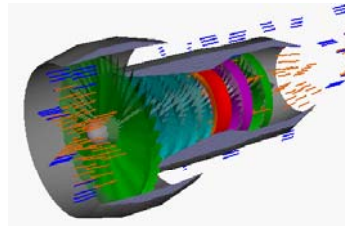


# Turbinas Axiales

---



**Prof. Miguel ASUAJE**

*Marzo 2012*

## Contenido

---

- Generalidades
- Análisis de la etapa de una turbina axial
- Triángulo de Velocidades y Etapa Normal
- Trabajo de una Etapa
- Diagrama de Mollier
- Grado de Reacción
- Rendimiento y Pérdidas de una etapa
- Análisis de los componentes de pérdidas
- Diseño
- Funcionamiento fuera del punto de Operación

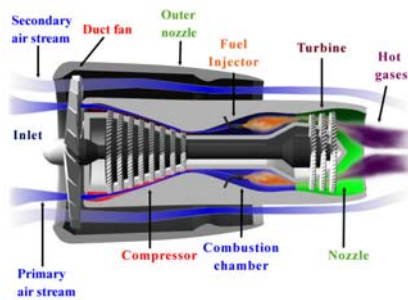
# Generalidades

## Recordemos que.....

Una Turbina a Gas es un motor diseñado para convertir la energía de un combustible en energía mecánica útil en un eje y/o en impulso en un chorro.

Sus componentes principales:

Compresor  
Cámara de Combustión  
Turbina



Turbinas a Gas

# Generalidades

y además, son empleadas .....

- Para generación de energía (plantas térmicas)
- Para propulsión aérea
- Para abastecimiento de calor
- Para turbocompresores
- Para aeromodelismo (nanoturbinas)



Turbina de avión

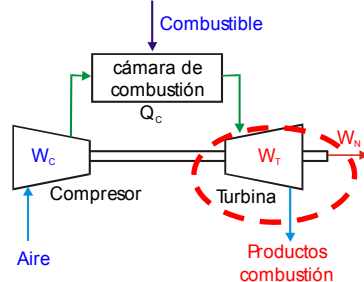
<http://www.taringa.net/posts/celular/es/1833096/new-ringtone-el-avion-para-movil.html>



# Análisis de la Etapa de la Turbina Axial

Veamos entonces cómo funciona la turbina de tipo axial dentro de todo el conjunto de la Turbina a Gas. Es decir, se hablará de la "turbina de la turbina"

TAG: Ciclo Abierto



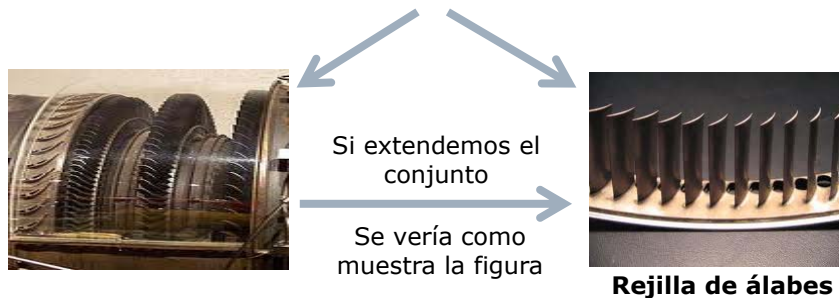
# Etapa de una Turbina Axial

En una turbina axial el flujo entra a una corona de álabes fijos (estator) que actúan como toberas que aumentan su velocidad y direccionan el flujo para pasar al Rotor. De esta forma se establece que la etapa de una turbina axial esta conformada por una etapa de un **Estator** y una etapa de un **Rotor**, que corresponden al paso desde el **1** hasta **3**.

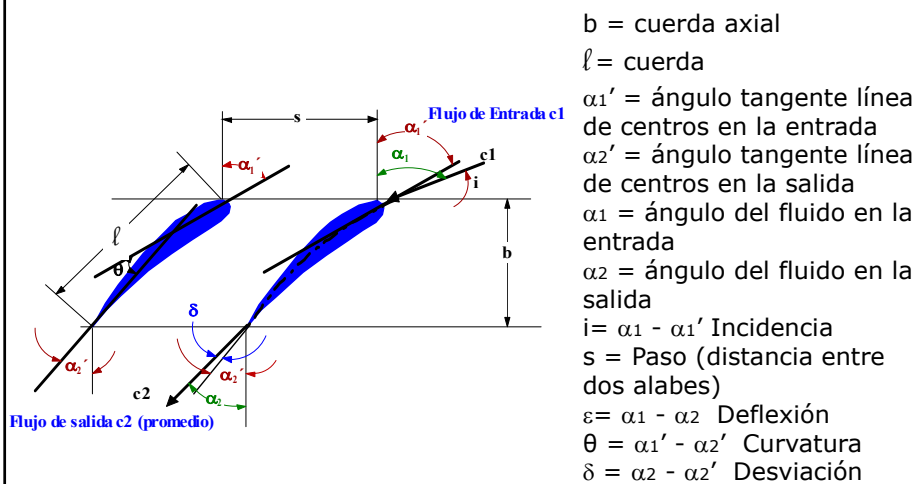


# Análisis de la etapa de la turbina

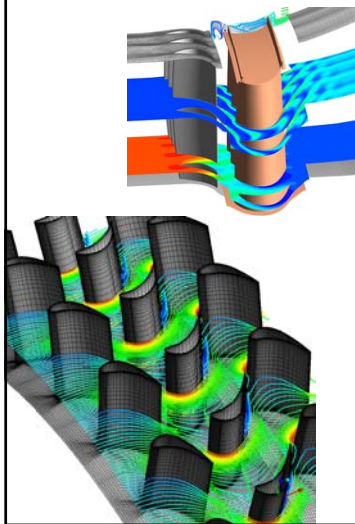
Tanto el rotor como el estator, están compuestos por álabes dispuestos uno al lado del otro de manera circular.



# Nomenclatura Álabes en rejillas

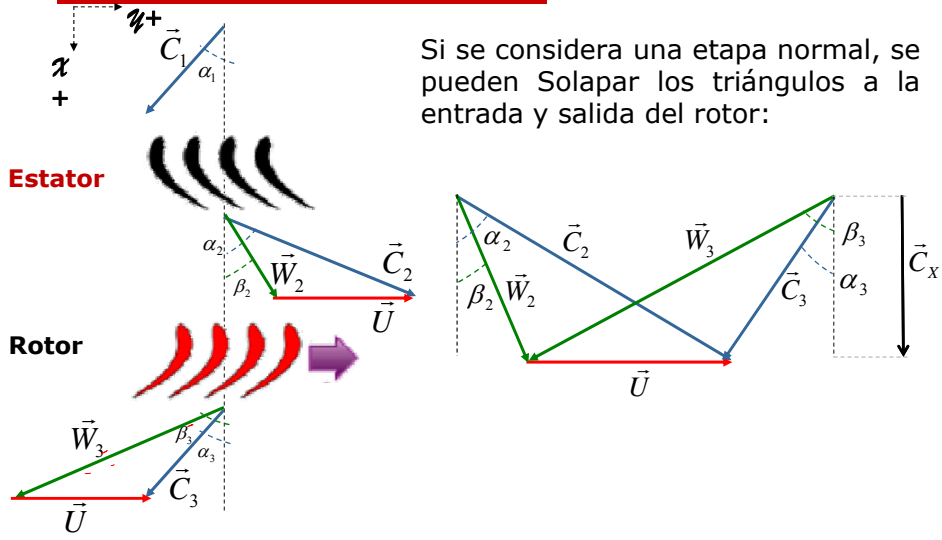


# Premisas en el estudio de una Turbina Axial



- Análisis bidimensional o "quasi-2D". La velocidad en la dirección radial es igual a cero. i.e: flujo paralelo al eje
- Se estudian en el plano medio del álabes (representativo de la etapa)
  - o Si la relación de envergadura respecto a la cuerda no es grande
- Infinitos álabes
- Régimen permanente
- Flujo Incompresible

# Triángulos de Velocidades



## Etapa Normal

Las Velocidades absolutas de entrada y de salida son iguales en magnitud y en dirección

$$\vec{C}_1 = \vec{C}_3 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_3$$

Por continuidad

Considerando

$$\rho \approx \text{ctte}$$

$$A \approx \text{ctte}$$

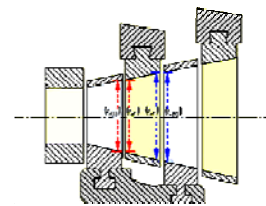
Es cierto?

$$\rho A_1 C_{x1} \approx \rho A_2 C_{x2} \approx \rho A_3 C_{x3}$$

$$C_{x1} \approx C_{x2} \approx C_{x3}$$

## Etapa Normal

*Como  $C_1 = C_3$  en todas las etapas, la ALTURA de los álabes en cada etapa debe aumentar gradualmente para compensar la disminución de densidad y compensar la ecuación de continuidad!!!*



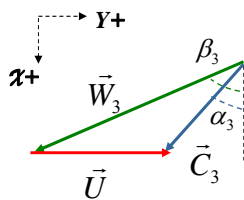
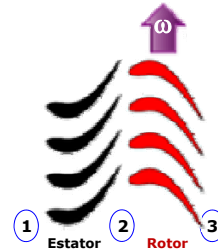
# Transferencia de Energía ROTOR...

## Ecuación de Euler

En su forma más general tenemos que:

$$\Delta w = U_2 \cdot C_{\theta 2} - U_3 \cdot C_{\theta 3} \quad \left[ \frac{m^2}{s^2} \right] = \left[ \frac{J}{kg} \right]$$

En una turbina Axial  $U_2 = U_3 = U$ . Basándonos en el triángulo de velocidad a la salida del rotor, nos queda:

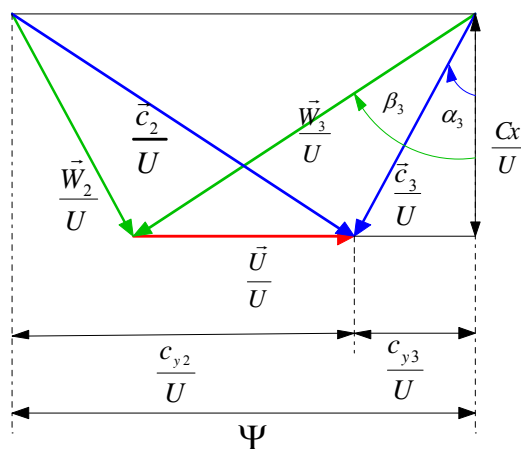


$$\Delta w = U(C_{y2} - C_{y3})$$

En esta última expresión  $C_{y3} < 0$ , por lo tanto:

$$\Delta w = U(C_{y2} + |C_{y3}|)$$

## Triángulos de Velocidades Adimensionales o Unitarios



### Factor de Flujo

$$\phi = \frac{C_x}{U}$$

### Factor de Potencia

$$\Psi = \frac{\Delta h_s}{(ND)^2} \approx \frac{\Delta w}{U^2}$$

$$\Psi = \frac{C_{y2} + C_{y3}}{U}$$

### Potencia de Euler

$$\Delta w = U(C_{y2} + C_{y3})$$

## Trabajo de una Etapa Normal

Por otra parte sabemos que el trabajo también puede ser estimado como:

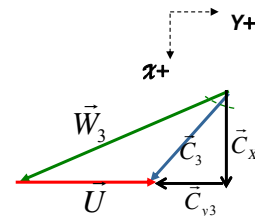
$$\Delta W = h_{01} - h_{03}$$

Pero en el estator (tobera) ocurre que:  $h_{01} = h_{02}$

$$\therefore \Delta W = h_{02} - h_{03} = U(c_{y2} + |c_{y3}|)$$

$$\left( h_2 + \frac{1}{2} C_2^2 \right) - \left( h_3 + \frac{1}{2} C_3^2 \right) = U(c_{y2} + |C_{y3}|)$$

$$\left[ h_2 + \frac{1}{2} (C_{x2}^2 + C_{y2}^2) \right] - \left[ h_3 + \frac{1}{2} (C_{x3}^2 + C_{y3}^2) \right] = U(c_{y2} + C_{y3})$$



## Trabajo de una Etapa Normal

Recordemos que:  $\vec{C}_{x2} = \vec{C}_{x3} = \vec{C}_x$

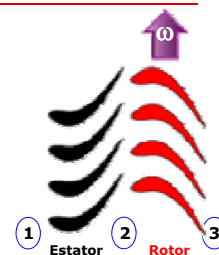
Por lo tanto...

$$h_2 - h_3 + \frac{1}{2} (\vec{C}_{y2}^2 - \vec{C}_{y3}^2) = U(\vec{C}_{y2} + \vec{C}_{y3})$$

$$h_2 - h_3 + \frac{1}{2} (\vec{C}_{y2} - \vec{C}_{y3})(\vec{C}_{y2} + \vec{C}_{y3}) - U(\vec{C}_{y2} + \vec{C}_{y3}) = 0$$

$$h_2 - h_3 + \frac{1}{2} (\vec{C}_{y2} + \vec{C}_{y3}) [\vec{C}_{y2} - \vec{C}_{y3} - 2U] = 0$$

$$h_2 - h_3 + \frac{1}{2} (\vec{C}_{y2} + \vec{C}_{y3}) [(\vec{C}_{y2} - \vec{U}) - (\vec{C}_{y3} + \vec{U})] = 0$$





## Trabajo de una Etapa Normal

Regresando a los triángulos de velocidades en **2** y **3**:

**Estator**

**Rotor**

$$\left. \begin{aligned} \bar{c}_{y2} - U &= \bar{w}_{y2} \\ \bar{c}_{y3} + U &= \bar{w}_{y3} \end{aligned} \right\} \bar{c}_{y2} + \bar{c}_{y3} = \bar{w}_{y2} + \bar{w}_{y3}$$

Sustituyendo en la expresión anterior:

$$h_2 - h_3 + \frac{1}{2}(\bar{c}_{y2} + \bar{c}_{y3})[(\bar{c}_{y2} - U) - (\bar{c}_{y3} + U)] = 0$$

$$h_2 - h_3 + \frac{1}{2}(\bar{w}_{y2} + \bar{w}_{y3})(\bar{w}_{y2} - \bar{w}_{y3}) = 0$$

$$h_2 - h_3 + \frac{1}{2}(\bar{w}_{y2}^2 - \bar{w}_{y3}^2) = 0$$

## Trabajo de una Etapa Normal

Sumando y restando por  $\frac{1}{2}\bar{w}_x^2$ :

**Estator**

**Rotor**

$$h_2 - h_3 + \frac{1}{2}(\bar{w}_{y2}^2 - \bar{w}_{y3}^2) + \frac{1}{2}\bar{w}_x^2 - \frac{1}{2}\bar{w}_x^2 = 0$$

$$h_2 - h_3 + \frac{1}{2}[(\bar{w}_{y2}^2 + \bar{w}_x^2) - (\bar{w}_{y3}^2 + \bar{w}_x^2)] = 0$$

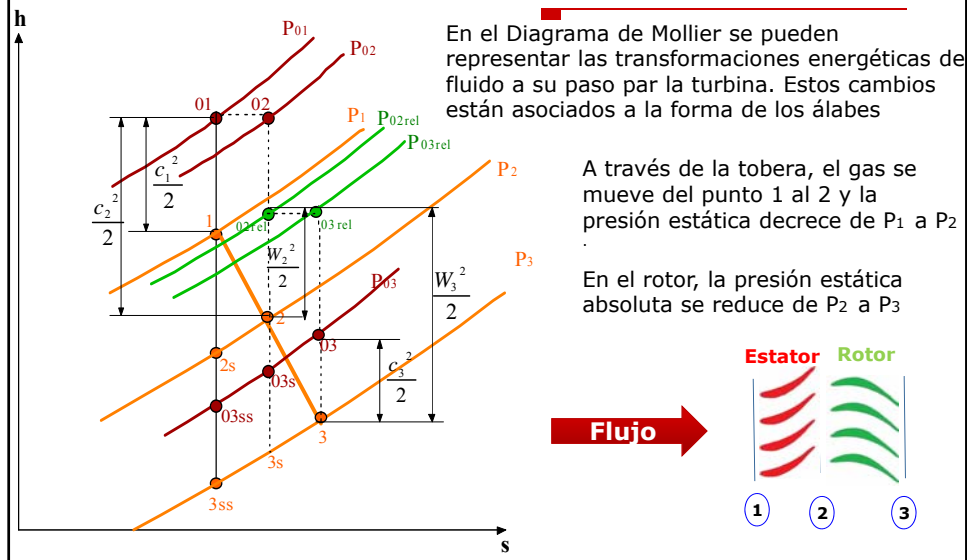
$$h_2 - h_3 + \frac{1}{2}\bar{w}_2^2 - \frac{1}{2}\bar{w}_3^2 = 0$$

$$h_2 + \frac{1}{2}\bar{w}_2^2 = h_3 + \frac{1}{2}\bar{w}_3^2$$

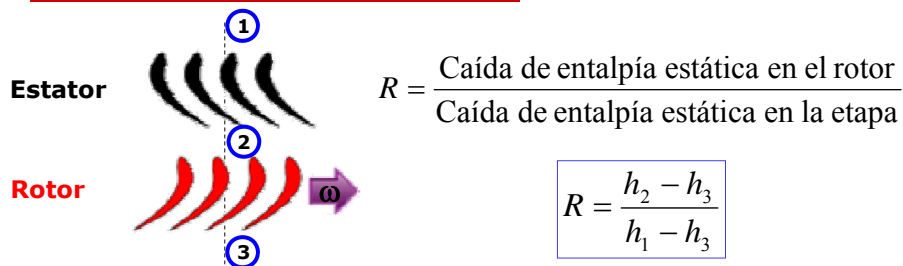
Finalmente:

$$h_{02rel} = h_{03rel}$$

## Proceso de Expansión. Diagrama de Mollier



## Grado de Reacción (R)

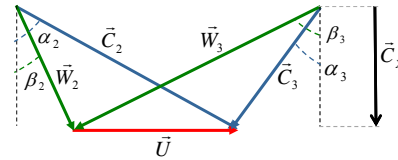


Dentro de las turbinas axiales tenemos los tres casos característicos siguientes:

- Turbinas de acción con presión constante en el rotor  $R < 0$
- Turbina de acción con entalpía constante en el rotor  $R = 0$
- Turbina de reacción, con  $R = 0,5$
- Turbina de reacción pura, con  $R = 1,0$

# Grado de Reacción

A partir de las ecuaciones fundamentales y los triángulos:



1 
$$R = \frac{Cx}{2U} (tg\beta_3 - tg\beta_2)$$

2 
$$R = \frac{1}{2} + \frac{Cx}{2U} (tg\beta_3 - tg\alpha_2) = \frac{1}{2} + \frac{W_{y3} - C_{y2}}{2U}$$

3 
$$R = 1 + \frac{Cx}{2U} (tg\alpha_3 - tg\alpha_2)$$



**Pero atención: 1, 2, 3 son linealmente dependientes!!!**

$$R = \frac{h_2 - h_3}{h_1 - h_3} = \frac{h_2 - h_3}{h_{01} - h_{03}}$$

# Grado de Reacción

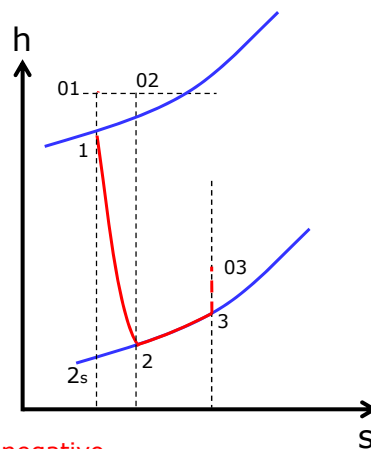
**R < 0** Turbina axial de acción con *presión constante* en el rotor

**Estator**  $C_2 \gg C_1$  expansión en el estator

$P_2 = P_3$  presión constante en el rotor.

$W_3 < W_2$  no hay expansión. La disminución de la velocidad es debida a la fricción.

$h_3 > h_2$  No hay expansión. El aumento de entalpía es debido a la fricción.



$$R = \frac{h_2 - h_3}{h_{02} - h_{03}} < 0 \text{ Ligeramente negativo}$$

## Grado de Reacción (R)

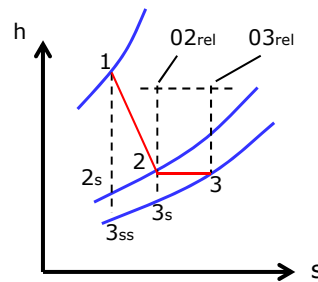
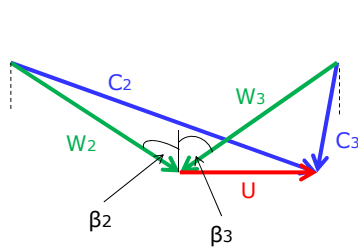
**R=0** → **Etapas de acción:** La *caída de entalpía en el rotor es igual a cero*  $h_2 = h_3$

Así mismo...

$$R = \frac{C_x}{2U} (tg\beta_3 - tg\beta_2) = 0 \Rightarrow tg\beta_3 = tg\beta_2 \Rightarrow \beta_3 = \beta_2$$

Como  $h_{02rel} = h_{03rel}$  y  $h_2 = h_3$  entonces  **$W_2 = W_3$**

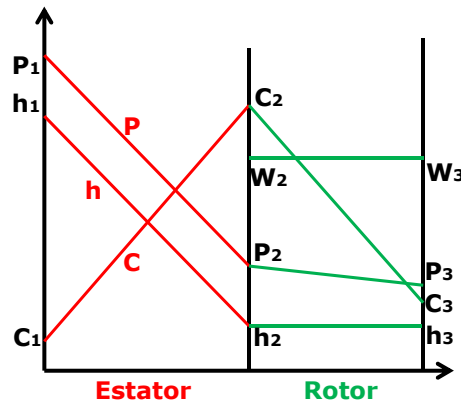
$$W_2 = W_3$$



## Grado de Reacción=0 Transformaciones Energéticas

**R=0** Turbina axial de acción con entalpía constante en el rotor

La variaciones de presión, velocidad absoluta, velocidad relativa y entalpía en el estator y rotor para **R=0**, están representadas en la siguiente figura:



# Grado de Reacción

**0 < R < 1** Turbina axial de reacción

**Estator**  $C_2 \gg C_1$  expansión en el estator

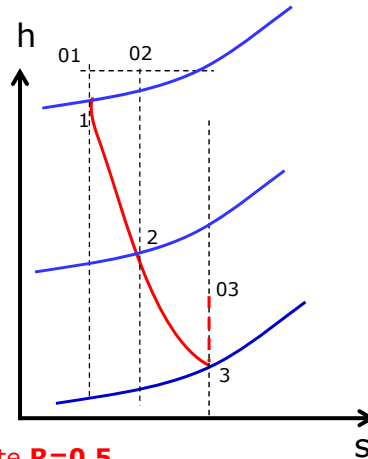
**Rotor**

$h_2 \gg h_3$  disminución de entalpía en el rotor debido a la expansión.

$W_3 \gg W_2$  aumento de la velocidad en el rotor debido a la expansión.

$P_2 \gg P_3$  disminución de la presión en el rotor debido a la expansión

$$R = \frac{h_2 - h_3}{h_{02} - h_{03}} \gg 0 \text{ Frecuentemente } R=0.5$$



# Grado de Reacción

**Turbina axial de reacción**

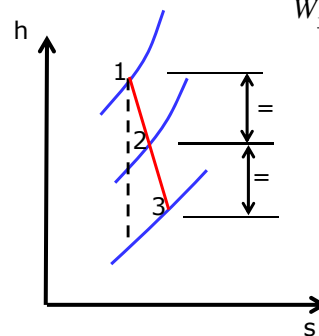
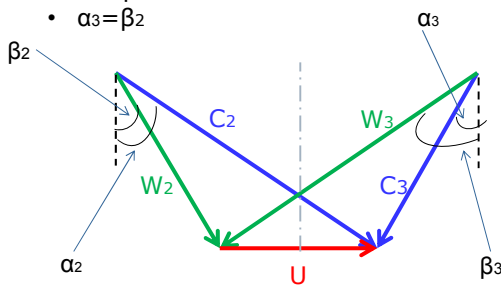
Cuando **R=0.5**, implica:

- Triángulo de velocidades es simétrico
- $h_1 - h_2 = h_2 - h_3$
- $\alpha_2 = \beta_3$
- $\alpha_3 = \beta_2$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{C_x}{2U} (tg \beta_3 - tg \alpha_2) \Rightarrow$$

$$0 = \frac{C_x}{2U} (tg \beta_3 - tg \alpha_2) \Rightarrow \beta_3 = \alpha_2$$

$$W_{y3} = C_{y2}$$



Triángulo de velocidades y diagrama de Mollier para **R=0.5**

# Grado de Reacción

## Turbina axial de reacción

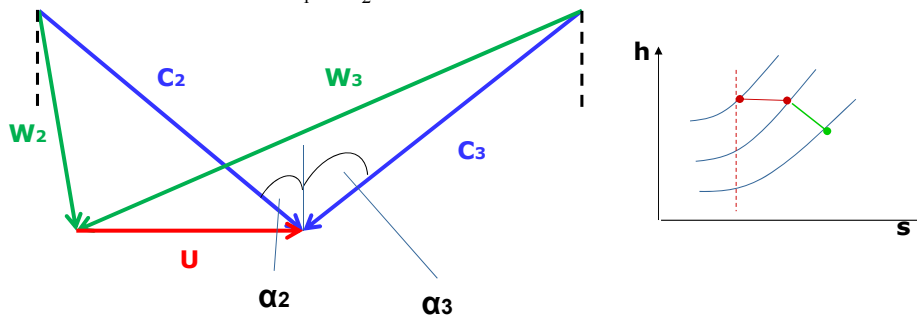
Cuando  $R=1$ , implica:

- $\alpha_2 = \alpha_3$
- El trabajo es realizado por el rotor
- La caída de entalpía en el estator es igual a cero:  $h_1 = h_2$

$$1 = 1 + \frac{C_x}{2U} (tg \alpha_3 - tg \alpha_2)$$

$$\Rightarrow tg \alpha_3 - tg \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = \alpha_2$$

$$C_{y3} = C_{y2}$$



# Grado de Reacción (R)

Una diferencia de presiones considerable entre la entrada y la salida de los álabes móviles, relacionada directamente con el grado de reacción, genera una fuerza sobre el disco de la turbina paralela a su eje que es transmitida a los rodamientos. Se considera entonces:

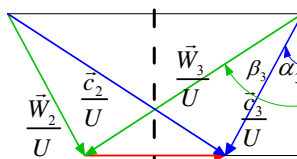
**Etapas de alta presión**  $R \rightarrow 4$  a  $5\%$

**Etapas de media presión**  $R \rightarrow 20$  a  $30\%$

**Generalmente** para turbinas de alta capacidad:  **$R \rightarrow 45$  a  $60\%$**

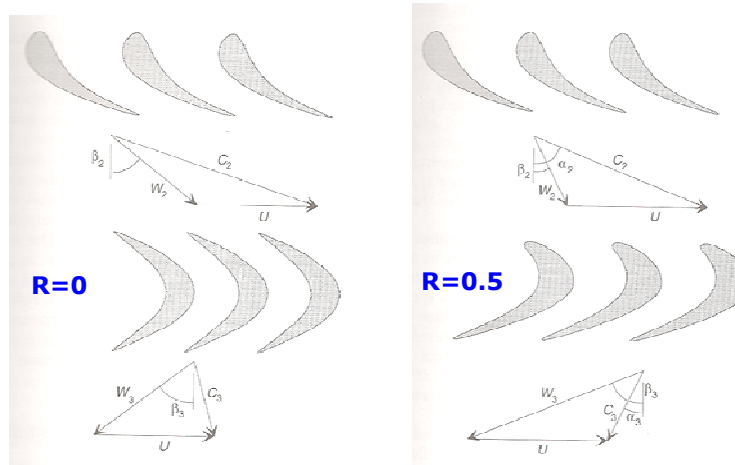
**$R=50\%$**   $\rightarrow$  Etapas Parson

*Etapas con  $R=0,5$ , tienen Igual perfil aerodinámico, álabes fijos y móviles*



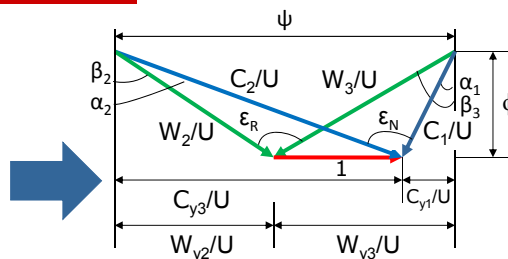
## Grado de Reacción (R)

### Diagrama de Etapa Turbina Axial para R=0 y R=0,5



## Los Triángulos de Velocidades y Grado de Reacción

Analizando los factores que determinan la forma del triángulo de velocidades se puede ver que su forma es definida por  $C_x$ ,  $C_\theta$  y  $U$  y considerando la definición de  $\psi$  y  $\phi$  se tiene que:



Por Definición:  $R = \frac{h_2 - h_3}{h_1 - h_3}$   $\rightarrow$   $h_{01} - h_{03} = h_1 - h_3 = \Delta h_0 = \psi U^2$   
 $h_2 - h_3 = \frac{1}{2} (W_{y3}^2 - W_{y2}^2)$

$$R = \frac{(W_{y3} + W_{y2})(W_{y3} - W_{y2})}{2\psi U^2} = 1 + \frac{(C_{y3} - C_{y2})}{2U} = \frac{(W_{y3} - W_{y2})}{2U}$$

## Los Triángulos de Velocidades y Grado de Reacción

De manera similar  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{W_{y2}}{U} = \frac{\psi}{2} - R \quad \frac{C_{y2}}{U} = \frac{\psi}{2} + 1 - R \quad \frac{W_{y3}}{U} = \frac{\psi}{2} + R \end{array} \right.$

La velocidad de salida en el estator y el rotor  $\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{C_2}{U}\right)^2 = \left(\frac{C_x}{U}\right)^2 + \left(\frac{C_{y2}}{U}\right)^2 = \phi^2 + \left(\frac{\psi}{2} + 1 - R\right)^2 \\ \left(\frac{W_3}{U}\right)^2 = \left(\frac{C_x}{U}\right)^2 + \left(\frac{W_{y3}}{U}\right)^2 = \phi^2 + \left(\frac{\psi}{2} + R\right)^2 \end{array} \right.$

La eficiencia se transforma en:

$$\eta_{TT} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2\psi} \left[ \left\langle \phi^2 + \left(\frac{\psi}{2} + 1 - R\right)^2 \right\rangle \xi_N + \left\langle \phi^2 + \left(\frac{\psi}{2} + R\right)^2 \right\rangle \xi_R \right]}$$

## Los Triángulos de Velocidades y Grado de Reacción

El resto de los elementos de los triángulos de velocidades también pueden ser expresados en términos de  $\phi$ ,  $\psi$  y  $R$

$$\alpha_1 = \arctg \left( \frac{\left(\frac{\psi}{2}\right) + R - 1}{\phi} \right) \quad \alpha_2 = \arctg \left( \frac{\left(\frac{\psi}{2}\right) - R + 1}{\phi} \right)$$

$$\beta_2 = \arctg \left( \frac{\left(\frac{\psi}{2}\right) - R}{\phi} \right) \quad \beta_3 = \arctg \left( \frac{\left(\frac{\psi}{2}\right) + R}{\phi} \right)$$

$$\varepsilon_S = \alpha_1 + \alpha_2 = \arctg \left( \frac{\phi\psi}{\phi^2 - \frac{\psi^2}{4} + (R+1)^2} \right) \quad \varepsilon_R = \beta_2 + \beta_3 = \arctg \left( \frac{\phi\psi}{\phi^2 - \frac{\psi^2}{4} + R^2} \right)$$



## Acción vs. Reacción

*En cuanto al rendimiento ...*

**Suponiendo recuperada la carga de velocidad de la última etapa**

$$\eta_{TT} = \frac{1}{1 + \text{Pérdidas}}$$

$$\eta_{TT} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2\psi} \left[ \left\{ \phi^2 + \left( \frac{\psi}{2} + 1 - R \right)^2 \right\} \zeta_S + \left\{ \phi^2 + \left( \frac{\psi}{2} + R \right)^2 \right\} \zeta_R \right]}$$

**Buscando el grado de reacción óptimo para un mismo punto de operación**

$$\left\{ \frac{\partial \text{Pérdidas}}{\partial R} \right\}_{\phi, \psi} = 0 \Rightarrow R = 0,5$$

$$\zeta_S = \zeta_R$$

**Una etapa de Reacción tendrá mejor rendimiento que una etapa de acción**

## Acción vs. Reacción 0.5

*En cuanto a la Velocidad Periférica ...*

$$\frac{\partial \left\{ \frac{1}{2\psi} \left[ \left\{ \phi^2 + \left( \frac{\psi}{2} + 1 - R \right)^2 \right\} \zeta_S + \left\{ \phi^2 + \left( \frac{\psi}{2} + R \right)^2 \right\} \zeta_R \right] \right\}}{\partial \psi} \Bigg|_{\phi, R}$$

**Buscando el factor de carga óptimo para un mismo punto de operación**

$$\psi = \frac{\Delta h}{U^2} \approx 2 \quad \forall \quad R = 0$$

$$\psi = \frac{\Delta h}{U^2} \approx 1 \quad \forall \quad R = \frac{1}{2}$$

Para el mismo salto de entalpía de acción tendrá menor velocidad periférica que una etapa de reacción

## Acción vs. Reacción 0.5

---

### *Varios aspectos ...*

En las etapas de acción las pérdidas intersticiales son prácticamente nulas. En las turbinas de reacción se requiere por lo general dispositivos de sellado para reducir las pérdidas

Debido a la expansión fuerte en el estator del escalonamiento de acción frente al de reacción, la temperatura de entrada al rotor de la etapa de acción es más baja. Ventaja sobre todo en las primeras etapas de turbinas a gas

La diferencia de presiones en las turbinas de reacción generan empujes. Se soluciona con turbinas con flujos contrapuestos

Los álabes de una etapa de reacción 0.5, son iguales para el estator y el rotor

Las etapas de acción son utilizadas cuando se requiere trabajar con admisión parcial

---

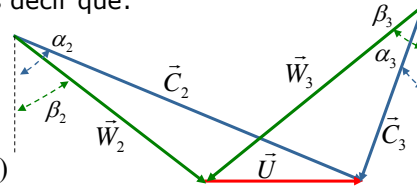
## Casos Particulares

## $\eta_{tt}$ de una etapa con $R=0$

Del triangulo de velocidades podemos decir que:

$$\begin{aligned} C_{y2} = W_{y2} + U &\Rightarrow \tan(\alpha_2) = \tan(\beta_2) + \frac{1}{\phi} \\ C_{y3} = W_{y3} - U &\Rightarrow \tan(\alpha_3) = \tan(\beta_3) - \frac{1}{\phi} \end{aligned}$$

$$\psi = \frac{\Delta w}{U^2} = \phi(\tan \alpha_2 + \tan \alpha_3) = \phi(\tan \beta_2 + \tan \beta_3)$$



**Si  $R=0$**   $R = \frac{C_x}{2U}(\tan \beta_3 - \tan \beta_2) = 0 \Rightarrow \beta_3 = \beta_2 \Rightarrow \psi = 2 \cdot \phi \cdot \tan \beta_2$

Con esta última expresión y las deducciones del triangulo de velocidades hechas previamente obtenemos que:

$$\tan(\alpha_2) = \frac{\left(\frac{\psi}{2} + 1\right)}{\phi} \quad \tan(\alpha_3) = \frac{\left(\frac{\psi}{2} - 1\right)}{\phi}$$

## $\eta_{tt}$ de una etapa con $R=0$

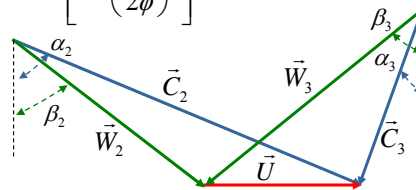
Del triangulo de velocidades.....

$$C_2 = C_x \cdot \sec(\alpha_2) \Rightarrow C_2^2 = C_x^2 \cdot \sec^2(\alpha_2) = C_x^2 (1 + \tan^2(\alpha_2)) = C_x^2 \left[ 1 + \frac{\left(\frac{\psi}{2} + 1\right)^2}{\phi^2} \right]$$

$$W_3 = C_x \cdot \sec(\beta_3) \Rightarrow W_3^2 = C_x^2 (1 + \tan^2(\beta_3)) = C_x^2 \left[ 1 + \left(\frac{\psi}{2\phi}\right)^2 \right]$$

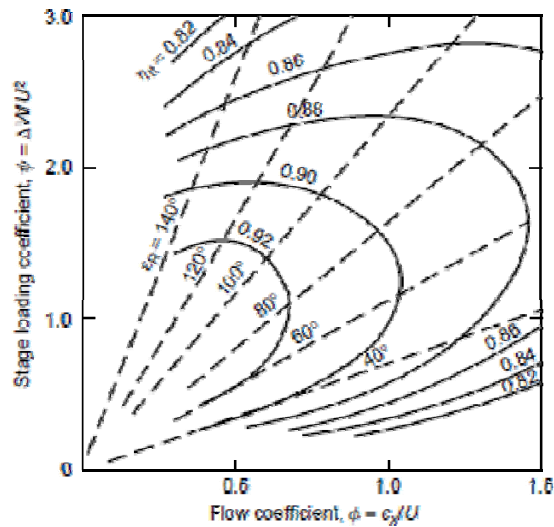
De esta forma:

$$\frac{1}{\eta_{tt}} = 1 + \frac{\xi_R W_3^2 + \xi_N C_2^2}{2\Delta W}$$

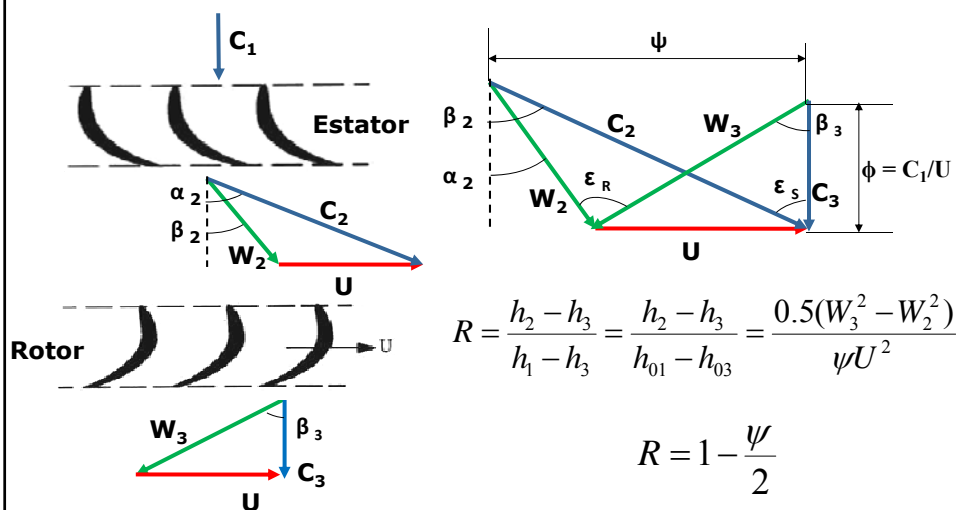


$$\frac{1}{\eta_{tt}} = 1 + \frac{1}{2\psi} \cdot \left\{ \xi_R \cdot \left[ \phi^2 + \left(\frac{\psi}{2}\right)^2 \right] + \xi_N \cdot \left[ \phi^2 + \left(1 + \frac{\psi}{2}\right)^2 \right] \right\}$$

## $\eta_{tt}$ de una etapa con $R=0$



## Turbinas Axiales sin rotación inter-etapas



## Turbinas Axiales sin rotación inter-etapas

El resto de los elementos de los triángulos de velocidades también pueden ser expresados en términos de  $\phi$  y  $\psi$ .

$$\alpha_2 = \varepsilon_s = \arctg\left(\frac{\psi}{\phi}\right) \quad \beta_2 = \arctg\left(\frac{\psi-1}{\phi}\right)$$

$$\beta_3 = \arctg\left(\frac{1}{\phi}\right) \quad \varepsilon_R = \beta_2 + \beta_3$$

$$\frac{C_2}{U} = \sqrt{\phi^2 + \psi^2} \quad \frac{W_3}{U} = \sqrt{\phi^2 + 1}$$

Lo cual cambia la eficiencia

$$\eta_{TT} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2\psi} [\langle \phi^2 + \psi^2 \rangle \xi_N + \langle \phi^2 + 1 \rangle \xi_R]}$$

## Turbinas Axiales sin rotación inter-etapas

$$\eta_{TT} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2\psi} [\langle \phi^2 + \psi^2 \rangle \xi_N + \langle \phi^2 + 1 \rangle \xi_R]}$$

Derivando respecto a  $\psi$  la expresión resaltada se puede obtener que

$$\psi_{opt} = \sqrt{\left(1 + \frac{\xi_R}{\xi_N}\right)\phi^2 + \frac{\xi_R}{\xi_N}} \quad \text{Asumiendo } \frac{\xi_R}{\xi_N} \approx 1$$



$$\psi_{opt} = \sqrt{2\phi^2 + 1}$$

## $\eta_{ts}$ de una etapa con velocidad Axial a la Salida

Asumiendo  $T_2=T_3$ , podemos decir que:

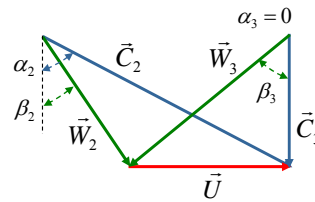
$$\frac{1}{\eta_{ts}} = 1 + \frac{\xi_R W_3^2 + \xi_N C_2^2 + C_1}{2\Delta W} = 1 + \frac{\phi^2}{2\psi} (\xi_R \cdot \sec^2(\beta_3) + \xi_N \cdot \sec^2(\alpha_2) + 1)$$

Para una etapa normal:

$$\tan(\beta_2) = \tan(\alpha_2) - \tan(\beta_3)$$

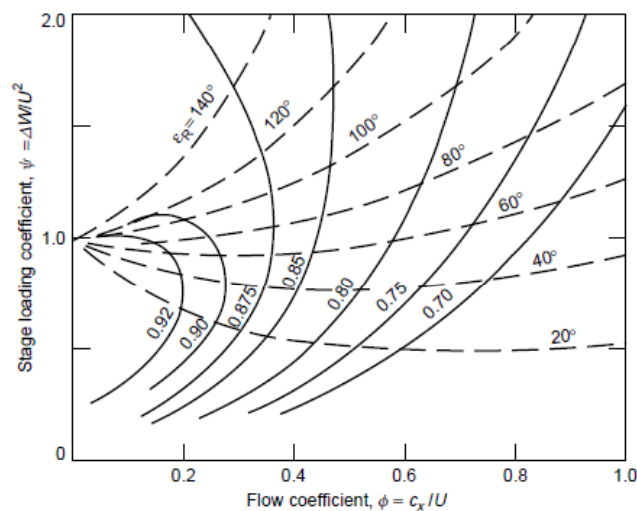
$$\sec^2(\beta_3) = 1 + \tan^2(\beta_3) = 1 + \frac{1}{\phi^2}$$

$$\sec^2(\alpha_2) = 1 + \tan^2(\alpha_2) = 1 + \left(\frac{\psi}{\phi}\right)^2$$



$$\frac{1}{\eta_{ts}} = 1 + \frac{1}{2\psi} \cdot \left\{ \xi_R \cdot [\phi^2 + 1] + \xi_N \cdot [\phi^2 + \psi^2] + \phi^2 \right\}$$

## $\eta_{ts}$ de una etapa con velocidad Axial a la Salida



## $\eta_{tt}$ de una etapa con R=50%

Para una etapa normal, asumiendo  $T_2=T_3$ , podemos decir que:

$$\frac{1}{\eta_{tt}} = 1 + \frac{\xi_R W_3^2 + \xi_N C_2^2}{2\Delta w}$$

Del triángulo de velocidades a la salida del rotor podemos decir que:

$$C_x = W_3 \cdot \cos(\beta_3) \Rightarrow W_3^2 = C_x^2 \cdot \sec^2(\beta_3) = C_x^2 (1 + \tan^2(\beta_3))$$

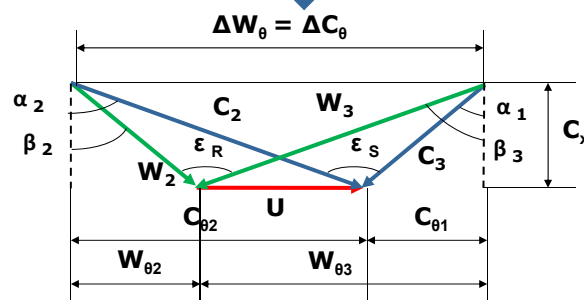
Si el grado  $R=0.5$   $\xi_N = \xi_R = \xi$  y  $C_2 = W_3$ , obtenemos:

$$\frac{1}{\eta_{tt}} = 1 + \frac{\xi \cdot \phi^2}{\psi} \cdot (1 + \tan^2(\beta_3)) = 1 + \frac{\xi \cdot \phi^2}{\psi} \left[ 1 + \left( \frac{1 + \psi}{2 \cdot \phi} \right)^2 \right]$$

## 50 % de Grado de Reacción

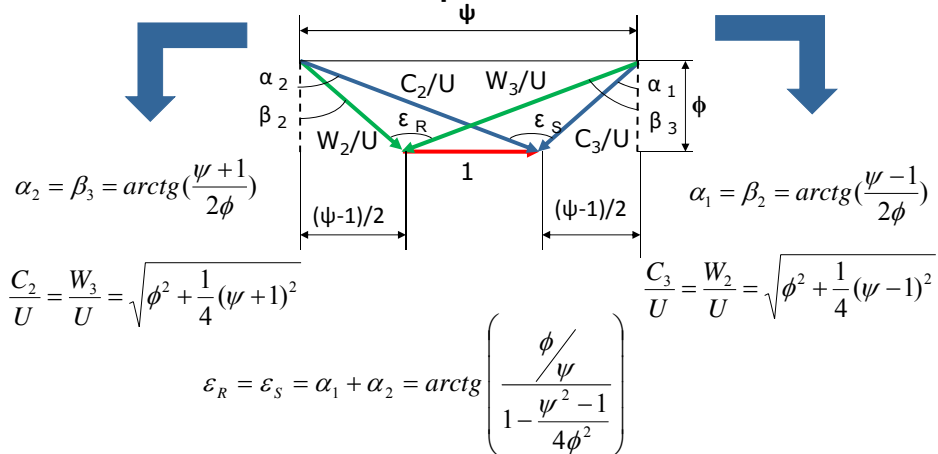
Por Definición  $R = \frac{h_2 - h_3}{h_1 - h_3} = 0.5 \Rightarrow h_2 - h_3 = h_1 - h_2$

La caída de entalpia es la misma en el rotor y en el estator

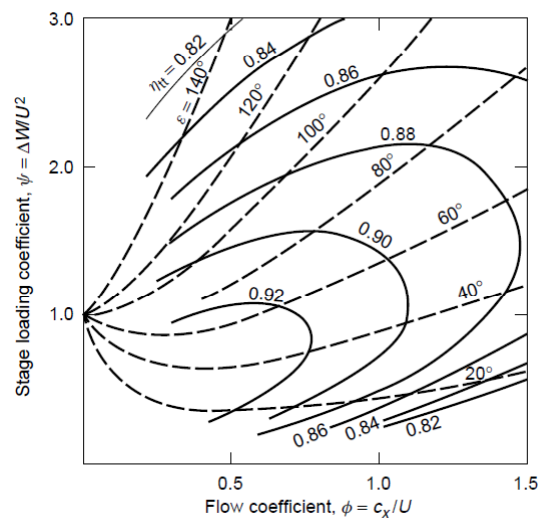


## 50 % de Grado de Reacción

Realizando las mismas consideraciones que en el triangulo de velocidades anterior se tiene que



## $\eta_{tt}$ de una etapa con R=50%





## Estimación del Rendimiento de una Etapa

$$\eta = \frac{\text{Trabajo real entre la entrada y salida de la etapa}}{\text{Trabajo ideal entre la entrada y salida de la etapa}}$$

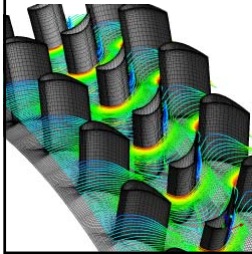
Basándonos en el diagrama de Mollier:

$$\eta = \frac{h_{01} - h_{03}}{h_{01} - h_{03ss}}$$

Suponiendo que  $C_1 = C_3 = C_{3ss}$ , obtenemos:

$$\eta_{tt} = \frac{h_1 - h_3}{h_1 - h_{3ss}}$$

**Eficiencia total a total**  
( $C_3$  es aprovechado por algo;  
ej. por la siguiente etapa)



## Rendimiento de una Etapa

Podemos reescribir el rendimiento de la siguiente manera :

$$\eta_{tt} = \frac{h_1 - h_3}{(h_1 - h_3) + (h_3 - h_{3s}) + (h_{3s} - h_{3ss})}$$

↳ Irreversibilidades en el rotor
↳ Irreversibilidades en el estator

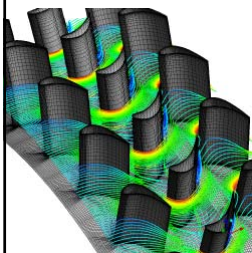
Por otra parte sabemos que:  $Tds \cong \left( dh - \frac{1}{\rho} dp \right)$

Para una línea de presión constante:

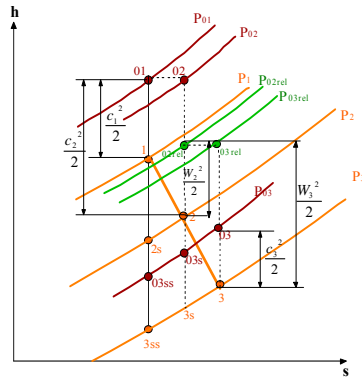
$$\Delta h = T\Delta s$$

$$h_{3s} - h_{3ss} = T_{3s}(s_{3s} - s_{3ss}) \quad T_{3s} \approx T_3$$

$$h_2 - h_{2s} = T_2(s_2 - s_{2s})$$



## Rendimiento de una Etapa



Del diagrama de Mollier podemos decir que:

$$(s_{3s} - s_{3ss}) = (s_2 - s_{2s})$$

Por lo tanto, si dividimos las últimas dos ecuaciones de la lamina anterior nos queda:

$$h_{3s} - h_{3ss} = \frac{T_3}{T_2} (h_2 - h_{2s})$$

Finalmente podemos expresar el rendimiento:

$$\eta_{tt} = \frac{h_1 - h_3}{(h_1 - h_3) + \frac{T_3}{T_2} (h_2 - h_{2s}) + (h_3 - h_{3s})}$$

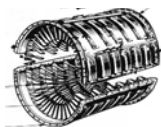
## Rendimiento de una Etapa

**Irreversibilidades en el estator**  $\longrightarrow \frac{T_3}{T_2} (h_2 - h_{2s})$

**Irreversibilidades en el rotor**  $\longrightarrow (h_3 - h_{3s})$

*¿Cómo determinamos las pérdidas?*

Es posible relacionar las pérdidas en el rotor y el estator con la energía cinética asociada a la salida de cada una de estas coronas de álabes



$$h_2 - h_{2s} = \frac{1}{2} C_2^2 \xi_N$$

Nozzle



$$h_3 - h_{3s} = \frac{1}{2} W_3^2 \xi_R$$

Rotor

## Rendimiento de una Etapa

Reemplazando estos dos últimos coeficientes en la expresión de rendimiento previamente presentada, obtenemos:

$$\text{Rendimiento total a total} \quad \eta_{tt} = \frac{h_1 - h_3}{(h_1 - h_3) + \frac{1}{2} W_3^2 \xi_R + \frac{1}{2} C_2^2 \xi_N \frac{T_3}{T_2}} = \left[ 1 + \frac{\xi_R W_3^2 + \xi_N C_2^2 \left( \frac{T_3}{T_2} \right)}{2(h_1 - h_3)} \right]^{-1}$$

$$\text{Rendimiento total a estático} \quad \eta_{ts} = \left[ 1 + \frac{\xi_R W_3^2 + \xi_N C_2^2 \left( \frac{T_3}{T_2} \right) + C_1^2}{2(h_1 - h_3)} \right]^{-1}$$

*Cuando  $\xi_R \xi_N \rightarrow 0$ ,  $\eta_{tt} \rightarrow 1$*

## Rendimiento de una Etapa

Cuando se requieran unas primeras aproximaciones ó en máquinas en las cuales el cambio de temperatura estática en el rotor nos es muy grande, la relación  $T_3/T_2$  puede aproximarse a **1**, resultando así:

$$\text{Rendimiento total a total} \quad \eta_{tt} = \left[ 1 + \frac{\xi_R W_3^2 + \xi_N C_2^2}{2(h_1 - h_3)} \right]^{-1}$$

$$\text{Rendimiento total a estático} \quad \eta_{ts} = \left[ 1 + \frac{\xi_R W_3^2 + \xi_N C_2^2 + C_1^2}{2(h_1 - h_3)} \right]^{-1}$$

*¿Cómo determinamos los coeficientes  $\xi_R$  y  $\xi_N$  ?*

## Correlaciones de Soderberg

Para estimar estos coeficientes de pérdida, Soderberg recolectó gran cantidad de data de pequeñas turbinas (convencionalmente construidas); relacionó el **rendimiento global** con las **pérdidas en cada una de las coronas de álabes** y logró determinar que son función directa de la geometría del perfil en la rejilla y del número de Reynolds.

$$\xi_R, \xi_N = f \left[ \frac{S}{l}, \frac{h}{b}, \frac{t}{l}, \text{Re} \right]$$

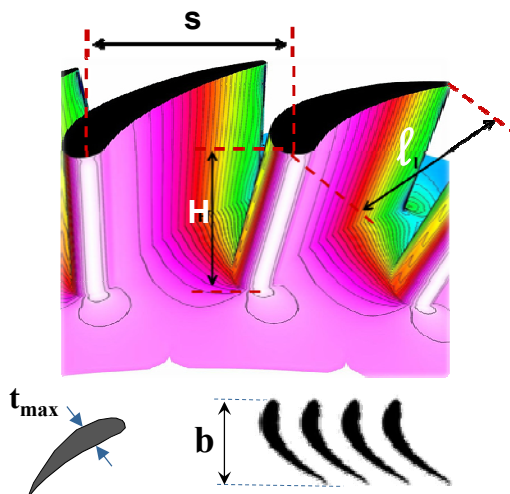
Paso  
Cuerda

Relación  
de Aspecto

Relación  
de Espesor

Reynolds

## Parámetros geométricos



**Relación Paso Cuerda:**

$$\frac{S}{l}$$

**Relación de Aspecto:**

$$\frac{H}{b}$$

**Relación de espesor:**

$$\frac{t_{\max}}{l}$$

## Valor óptimo de S/b para turbinas (Criterio de Zweifel)

**Zweifel** → Demostró que la eficiencia de en una corona de álabes esta influenciada por el valor de **S** y **b**.

Luego de experimentos de rejillas de turbinas, encontró que las pérdidas mínimas se encuentran cuando  $\psi_T$  (coeficiente de carga aerodinámica) toma un valor de **0.8**:

$$\psi_T = 2 \left( \frac{S}{b} \right) (\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2) \cos^2 \alpha_2 \quad \text{Donde: } \psi_T = \frac{Y}{Y_{id}}$$

**Coeficiente de carga Aerodinámica**

A partir de esta condición y para valores específicos de ángulos a la entrada y salida de un perfil se puede determinar el **valor óptimo de S/b**.

## Correlaciones de Soderberg

Para etapas diseñadas usando el criterio de valor óptimo de **Zweifel**, Soderberg a partir de sus experimentos sobre diversos tipos de turbinas, logró encontrar que los coeficientes de pérdidas para el rotor y el estator vienen dados por:

$$\xi_N^* = 0.04 + 0.06 \left( \frac{\varepsilon}{100} \right)^2 \quad \xi_R^* = 0.04 + 0.06 \left( \frac{\varepsilon}{100} \right)^2$$

Las ecuaciones anteriores son válidas siempre y cuando:

$$\frac{H}{b} = 3 \quad \frac{t_{\max}}{l} = 0.2 \quad \text{Re} = 10^5$$

**Cumpliendo estas condiciones Soderberg permite estimar el rendimiento con desviaciones menores al 3%**

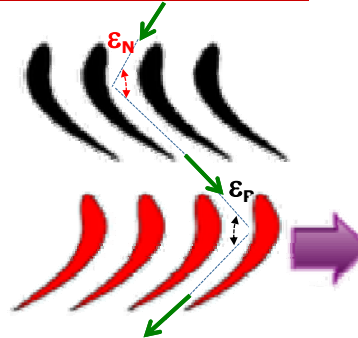
## Correlaciones de Soderberg

En las ecuaciones anteriores  $\varepsilon$  representa la deflexión del fluido en cada una de las rejillas de álabes.

$$\varepsilon_N = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \varepsilon_R = \beta_2 + \beta_3$$

Cuando no se conozca la deflexión podemos aproximarla a la curvatura:

$$\varepsilon_N = \alpha'_2 + \alpha'_3 \quad \varepsilon_R = \beta'_2 + \beta'_3$$

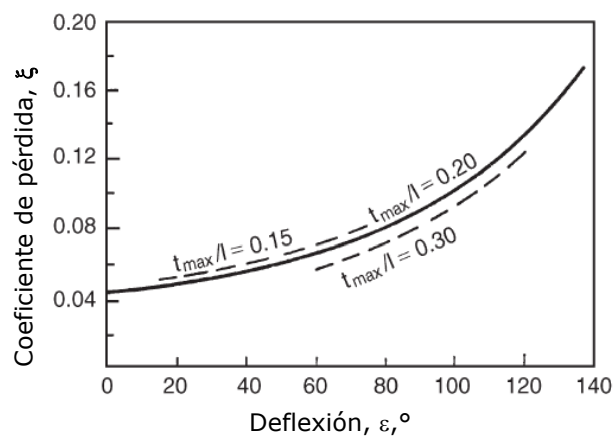


Estos ángulos son propios del perfil!!

**Estas correlaciones, y todas las correlaciones de Soderberg, se adecuan correctamente cuando  $\varepsilon \leq 120^\circ$**

## Variaciones de las Correlaciones de Soderberg

**Si  $t_{max}/l \neq 0.20 \rightarrow$  No hay grandes cambios de  $\xi$**



**Coeficiente de Pérdidas vs Deflexión**

## Variaciones de las Correlaciones de Soderberg

**Si la Relación de Aspecto  $H/b \neq 3$**

**Estator:**

$$\frac{1 + \xi_{N1}}{1 + \xi_N^*} = \left( 0,993 + 0,021 \frac{b}{H} \right) \rightarrow \xi_{N1} = (1 + \xi_N^*) \left( 0,993 + 0,021 \frac{b}{H} \right) - 1$$

**Rotor:**

$$\frac{1 + \xi_{R1}}{1 + \xi_R^*} = \left( 0,975 + 0,075 \frac{b}{H} \right) \rightarrow \xi_{R1} = (1 + \xi_R^*) \left( 0,975 + 0,075 \frac{b}{H} \right) - 1$$

$\xi_{N1}$  y  $\xi_{R1}$   $\rightarrow$  representan los coeficientes de pérdidas para números de Reynolds de  $10^5$

## Variaciones de las Correlaciones de Soderberg

**Si Número de Reynolds  $\neq 10^5$**

$$Re = \frac{\rho_2 c_2 D_{h2}}{\mu}$$

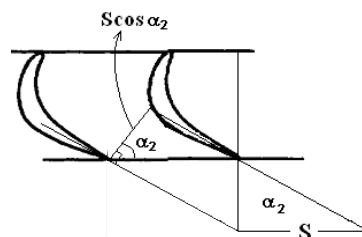
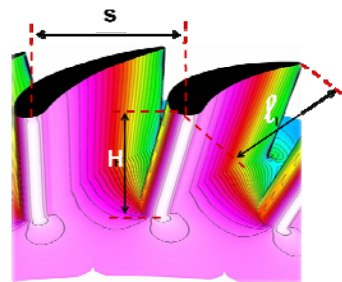
$$D_h = \frac{4A_{\text{flujo}}}{P_{\text{mojado}}} = \frac{4 \cdot HS \cos \alpha_2}{2S \cos \alpha_2 + 2H}$$

**Estator:**

$$\xi_{N2} = \left( \frac{10^5}{Re} \right)^{\frac{1}{4}} \xi_{N1}$$

**Rotor:**

$$\xi_{R2} = \left( \frac{10^5}{Re} \right)^{\frac{1}{4}} \xi_{R1}$$



## Grado de Reacción INFLUENCIA EN EL RENDIMIENTO

$$\eta_{TT} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2\psi} \left[ \left\langle \phi^2 + \left(\frac{\psi}{2} + 1 - R\right)^2 \right\rangle \xi_N + \left\langle \phi^2 + \left(\frac{\psi}{2} + R\right)^2 \right\rangle \xi_R \right]}$$

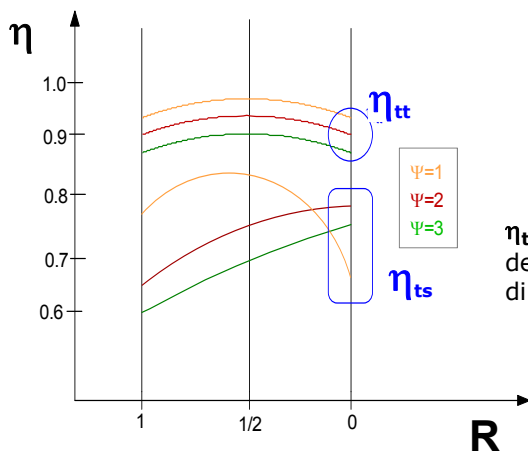
Derivando respecto a **R** la **Expresión** se puede obtener que el grado de **Reacción óptimo es 0.5** para todos los factores de carga y flujo.

Procediendo de igual manera se puede obtener el **factor de carga óptimo**.

$$\psi_{opt} = 2\sqrt{\phi^2 + 0.5 + R(R-1)} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \text{Para } R = 0.5 \quad \psi_{opt} &= \sqrt{4\phi^2 + 1} \\ \text{Para } R = 0 \quad \psi_{opt} &= \sqrt{4\phi^2 + 2} \end{aligned}$$

## Grado de Reacción INFLUENCIA EN EL RENDIMIENTO

$$Re = 10^5 \quad \frac{H}{b} = 3 \quad \frac{t_{max}}{l} = 0.2 \quad \phi = \frac{C_x}{U} = 0.4$$



$$\begin{aligned} \Delta w &= U(c_{y2} + c_{y3}) \\ R &= 1 + \frac{(Cy_3 - Cy_2)}{2U} \\ R &= 1 + \frac{\Delta w}{2U^2} \frac{Cy_2}{\psi U} \end{aligned}$$

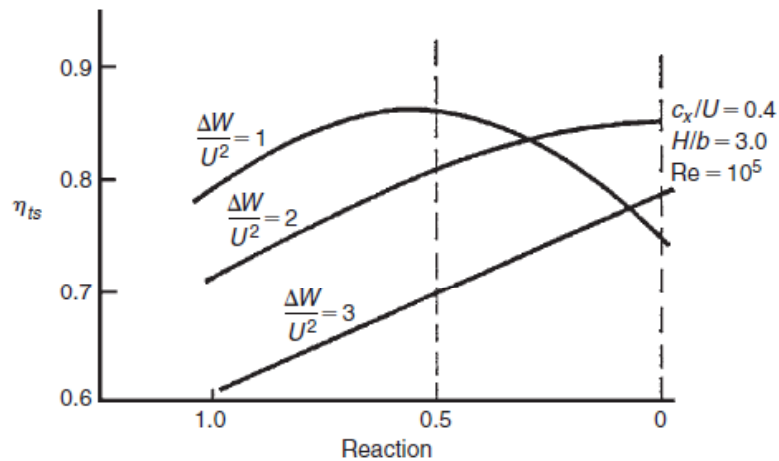
$\eta_{tt}$  no se ve afectado por los valores de **R**, a diferencia del  $\eta_{ts}$  quien esta directamente relacionado con **R** y  $\psi$

Si  $U \uparrow \rightarrow \psi \downarrow \rightarrow \eta_{tt} \uparrow$   
Si  $U \uparrow \rightarrow \psi \downarrow \rightarrow \eta_{ts} \uparrow$



## Grado de Reacción

### INFLUENCIA EN EL RENDIMIENTO



Eficiencia total-a-estática vs grado de reacción

## Análisis de las pérdidas dentro de la Turbina

El flujo a través de los álabes en una turbina es complejo. Sin embargo es posible identificar diferentes procesos en los que la entropía o pérdidas son generadas. La primera publicación fue hecha por Ainley and Mathieson (1951), luego Dunham and Came (1970) y Kacker and Okapuu (1982) modificaron las primeras correlaciones para formar lo que ahora se llama esquema AMDC+KO.

Diferentes divisiones de mecanismos que generan pérdidas han sido propuestos:

- Pérdida de perfil: pérdidas por el crecimiento de la capa límite y pérdidas de fricción
- Pérdida en borde de fuga: causado por el espesor finito del borde de ataque.
- Pérdidas de flujo secundario: causado por la distorsión del flujo a través del paso en la rejilla de álabes.
- Pérdidas anulares: causado por las pérdidas de fricción en la superficie del cubo.
- Pérdida de tolerancia en la punta: es causado por fuga de fluido entre la punta y la carcasa.
- Pérdidas de choque: se deben a ondas de choque en condiciones transónicas.

## Pérdidas en perfil

Al analizar la capa límite en la superficie del álabe es posible crear una expresión para la componente de pérdida debida a la disipación viscosa en términos de el espesor de capa límite.

$$\xi_p = \frac{\frac{1}{2} \cdot \rho_\infty \cdot C_\infty^2 \delta^{**}}{m \cdot C_p \cdot T_{01} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{k-1}{2} \cdot M_{2s}^2 \right)^{-1} \right]} \quad \text{donde..} \quad \delta^{**} = \int_0^\delta \frac{\rho \cdot C}{\rho_\infty \cdot C_\infty} \left[ 1 - \left( \frac{C}{C_\infty} \right)^2 \right] dy$$

Sin embargo medir el espesor de la capa límite posee cierta dificultad. Por esta razón se han desarrollado correlaciones, un ejemplo es la correlación de AMDC+KO para incidencia cero, bajos números de Mach y Reynolds en términos de la relación paso/cuerda

$$K_p = K_{p,1} + \left( \frac{\alpha_{1b}}{\alpha_2} \right)^2 (K_{p,2} - K_{p,1})$$

## Pérdidas en perfil

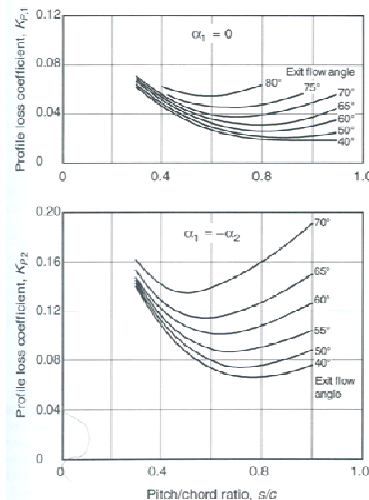
Esta correlación se puede utilizar tanto para el estator como para el rotor.

Se puede observar que para un ángulo a la entrada de 0 las pérdidas son menores, esto se debe principalmente a que posee una menor deflexión.

Existen correcciones referenciadas al número de Mach y el número de Reynolds. Hay estudios en los que se puede apreciar que al aumentar la velocidad la capa límite se reduce produciendo una disminución del 10% de las pérdidas. La correlación de Ainley fue calculada con  $Re=2 \times 10^5$  y para utilizar otro Reynolds se debe multiplicar por:

$$K_{Re} = \left( \frac{Re_2}{2 \times 10^5} \right)^{-0.4} \quad \text{Para } Re < 2 \times 10^5$$

$$K_{Re} = 1 \quad \text{Para } 2 \times 10^5 < Re < 10^6$$



## Pérdidas en perfil

$$K_{Re} = \left( \frac{Re_2}{10^6} \right)^{-0.2} \quad \text{Para } 10^6 < Re$$

La pérdida en el perfil se puede dividir en dos componentes: fricción viscosa en la superficie y déficit de momentum en la capa límite a la salida del álabe (muchas veces llamado arrastre de perfil. Traupel (1977) escribió las siguientes correlaciones:

$$\xi_p = 2\theta^* + \left( \frac{te^*}{1-te^*} \right)^2 \cdot \cos^2 \alpha_2 \quad \text{Donde..} \quad \theta^* = \frac{\theta_{SS} + \theta_{PS}}{s \cos \alpha_2} \quad te^* = \frac{2r_{TE}}{s \cos \alpha_2}$$

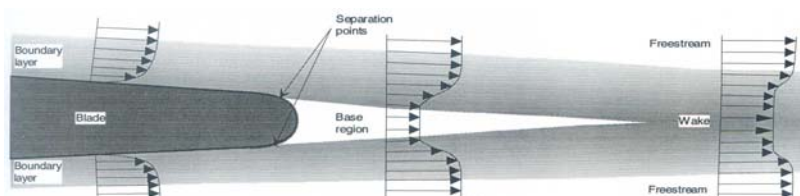
$\theta$  es el espesor de momentum de la capa límite,  $r_{te}$  es el espesor del borde de fuga del álabe y  $s$  es la separación entre álabes.

## Pérdidas en borde de fuga

Los álabes de turbina poseen un espesor finito en el borde de fuga lo que produce una separación del flujo al final del álabe en dos puntos en los que la presión es significativamente menor que en la línea de flujo. La pérdida asociada con esto se puede escribir:

$$\xi_{TE} = C_{pb} \cdot te^* \quad \text{Donde..} \quad C_{pb} = \frac{p_b - p_2}{p_{02} - p_2} \quad \text{Es el coeficiente de presión en la base, y } p_b \text{ es la presión en la región de la base.}$$

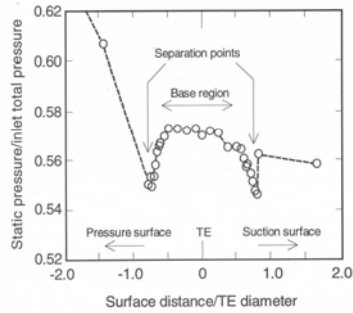
Este coeficiente depende de la geometría del borde de fuga y las condiciones existentes en las dos capas límites antes de la separación. Kacker and Okapuu (1982) establecieron que existía diferencia en las pérdidas de álabe con entrada axial y álabes que poseían cierto ángulo de entrada



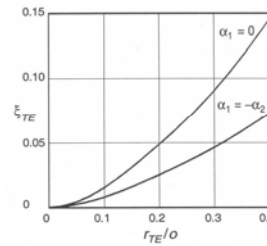
## Pérdidas en borde de fuga

Kacker and Okapuu (1982) establecieron que existía diferencia en las pérdidas de álabel con entrada axial y álabes que poseían cierto ángulo de entrada, y desarrollaron la siguiente correlación:

$$\zeta_{TE} = \zeta_{TE,1} + \left( \frac{\alpha_{1b}}{\alpha_2} \right)^2 (\zeta_{TE,2} - \zeta_{TE,1})$$



Distribución de presión en el borde de fuga



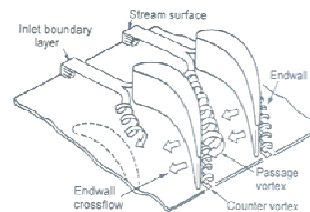
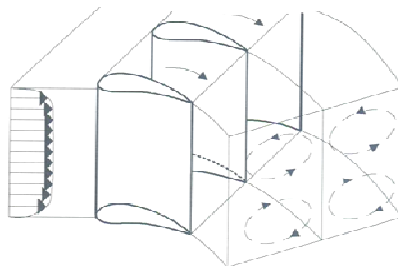
Coefficiente de pérdida en borde de fuga  
Kacker and Okapuu (1982)

## Pérdidas de flujo secundario

Flujo secundario es el nombre que se le da a flujo que va perpendicular a la dirección principal del flujo. En una turbina posee dos razones, la primera es el desvío del flujo debido a un gradiente de presión normal a las líneas de flujo a través de los álabes

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho \frac{C^2}{r}$$

Donde  $r$  es el radio local y  $C$  la velocidad. Es claro que debido que en el centro del conducto la velocidad es mayor que en la pared existirán gradientes de presión diferentes y se forman circulaciones llamadas passage vortex.

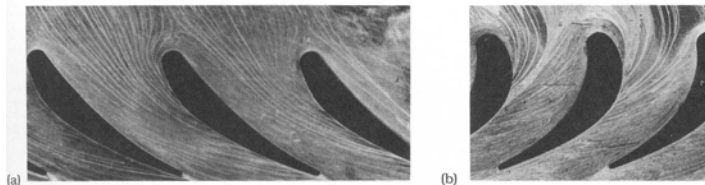


## Pérdidas de flujo secundario

Adicionalmente el flujo forma un vórtice al separarse en el borde de ataque, es conocido como vórtice de cola de caballo. Luego el flujo de la superficie de succión rota en dirección contraria a los vórtice de pasaje y al salir de la rejilla forman un counter vortex. Flujos secundarios son causantes importantes de pérdidas por sus propias energías cinéticas y porque redistribuyen el momentum de la capa límite produciendo mayores pérdidas.

Sieverding (1985) propone correlaciones de pérdida de flujo secundario y Dunham (1970) revisa la mayoría de las correlaciones propuestas. Ambos incluyen los siguientes factores influyentes:

a) **Forma del álabe:** los vórtices de pasaje son función de la deflexión y de la forma del álabe. En la fotografía siguiente se puede visualizar que a medida de que aumenta la deflexión el flujo secundario distorsiona el flujo mucho mas al final de la pared. La mayoría de las correlaciones incluyen los ángulos de entrada y salida y ángulos de deflexión.



No solo aumento la deflexión sino también el ángulo de incidencia

## Pérdidas de flujo secundario

b) **Relación paso cuerda:** afecta la carga en el álabe y se puede esperar que influencia de igual forma al flujo secundario que la forma del álabe.

c) **Relación de aspecto:** pérdidas de flujo secundario ocurren principalmente cerca de las paredes del álabe, por lo que se puede esperar que la relación de aspecto tenga menos influencia para valores grandes. Horlock (1960) mostró que la relación de aspecto posee gran influencia por debajo de 3, pero poca influencia en valores por encima.

d) **Número de Mach:** las pérdidas de flujo secundario disminuyen al aumentar el número de Mach. Debido a la gran velocidad de la garganta la capa límite se ve disminuida, lo que es favorable porque ahí se originan las pérdidas secundarias. En condiciones supersónicas la influencia del número de Mach en pérdidas secundarias es incierta.

e) **Espesor de capa límite en la entrada:** existe un desplazamiento crítico del espesor de la capa límite en la entrada el cual no influye en las pérdidas secundarias.

## Pérdidas de flujo secundario

La correlación de AMDC+KO es típica entre muchas propuestas:

$$K_s = \left(\frac{c}{h}\right) Z \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} f\left(\frac{\delta}{c}\right)$$

**Z es el factor de carga y  $\delta$  el desplazamiento de la capa límite a la entrada**

El factor de carga esta relacionado con el coeficiente de arrastre.

La correlación de AMDC+KO es típica de muchas propuestas:

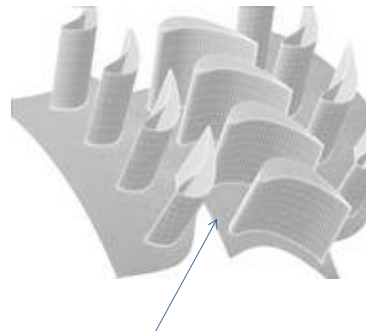
$$Z = \left(\frac{C_L}{s/c}\right) \frac{\cos^2 \alpha_2}{\cos^3 \bar{\alpha}} \quad \left(\frac{C_L}{s/c}\right) = 2|\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1| \cos \bar{\alpha}$$

$$\bar{\alpha} = \tan^{-1}\left(\frac{\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2}{2}\right) \quad f\left(\frac{\delta}{c}\right) = 0.0334$$

**Para las rejillas probadas**

## Pérdidas anulares

Esta asociado con el cubo y las capas límites de las filas de álabes, e influyen en los flujos secundarios. Algunos modelos no la toman en cuenta por separado sino que la convierten en parte de las pérdidas de flujo secundario. Entre el estator y el rotor las velocidades relativas el cubo son grandes lo que causa gran cantidad de pérdidas, por lo que la tolerancia de ser pequeña reducir las perdidas.



**Pared anular. Debido a las velocidades relativas entre el rotor y el estator en esta zona se generan perdidas.**

## Pérdidas por intersticios en la punta

Una tolerancia de trabajo entre la carcasa y la punta de los álabes debe ser dejada para el funcionamiento de la máquina, la fuga de flujo a través de este espacio afecta en la eficiencia de la etapa y también en el flujo másico.

Para álabes con bóveda la fuga es principalmente desde el borde de ataque al borde de fuga, sin embargo en efecto cortante de la bóveda rotando produce un considerable desvío del flujo. La bóveda puede incluir alguno sellos que reducen la fuga del flujo.

La fuga en las puntas de los álabes afecta el ángulo de salida del flujo en los que no poseen bóveda. El flujo va de la superficie de mayor presión a la de menor presión y luego forma un vórtice cuando llega a la otra superficie.



Con bóveda

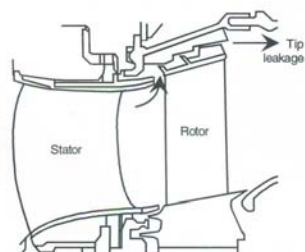


Sin bóveda

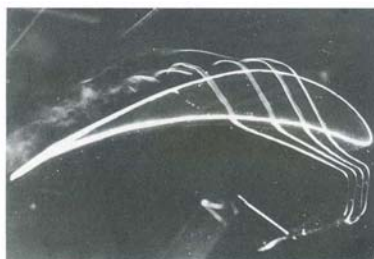


## Pérdidas por intersticios en la punta

La mayoría de las turbinas muestran una disminución lineal de las pérdidas con el aumento de las tolerancias en las puntas, sin embargo, para pequeños espacios menos del 1% de la altura del álabe, la relación no es lineal. Es importante tomar en cuenta que las fugas en las puntas dependen de el grado de reacción ya que la fuga del flujo va a depender de la variación de presión a través del álabe.



Fuga de flujo a través de la punta del álabe con anillo "shroud"



Flujo a través de la punta del álabe sin anillo "shroud"

## Pérdidas por intersticios en la punta

La correlación de AMDC+KO es la siguiente:

$$K_L = CZ \left( \frac{c}{h} \right) \left( \frac{\epsilon_r}{c} \right)^{0.78}$$

Donde  $\epsilon_r$  es la tolerancia en la punta, Z es el factor de carga y C es un coeficiente que posee un valor de 0.5

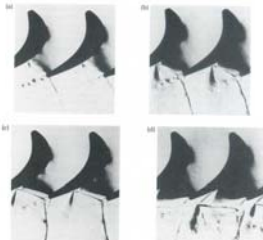
Dunham and Came (1970) recomendaron la misma expresión pero con C=0.25 para álabes con shroud.

Es posible con la ayuda de programas que simulan el flujo viscoso en 3D calcular las fugas en la punta, sin embargo no son datos confiables. Este tipo de cálculos son utilizados con fines comparativos, por ejemplo investigar los efectos de diferentes geometrías de punta.

## Pérdidas de Choque

Cuando el número de mach a la salida excede el valor crítico, se genera una onda de choque cerca del borde de fuga. Inicialmente se encuentra normal al ducto, luego se vuelve cada vez mas oblicuo y fuerte.

Para observar este fenómeno se utiliza una fotografía llamada Schlieren photographs que detecta cambios en densidades, ya que en la onda de choque hay gradientes grandes de densidad.



Schlieren photographs mostrando el desarrollo de la onda de choque con los siguientes números de Mach (a) 0.93 (b) 0,98 (c) 1.14 (d) 1.33



El color rojo es flujo supersónico, el amarillo transónico y el verde subsónico.



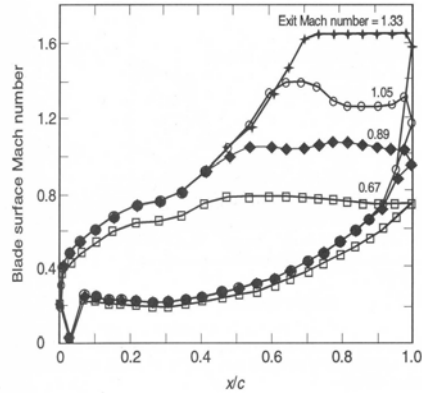
## Pérdidas de Choque

A medida que el número de Mach crece en la salida la onda de choque se vuelve mas oblicua y en la superficie de succión la capa límite se desprende se desprende.

Las perdidas de presión de estancamiento asociadas con la onda de choque pueden ser calculadas usando las relaciones dinámicas de gas estandar:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left[ \frac{(k+1) \cdot M_1^2}{2 + (k-1) \cdot M_1^2} \right]^{k/(k-1)} \cdot \left[ \frac{k+1}{2kM_1^2 - k + 1} \right]^{1/(k-1)}$$

Donde  $M_1$  es el número de Mach basado en la componente de velocidad aguas arriba de la onda de choque.



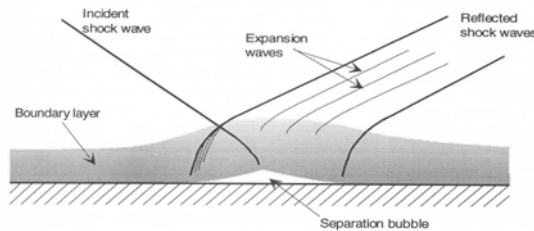
En el grafico se puede apreciar la desaceleración del flujo producida por la onda de choque.

## Pérdidas de Choque

En flujo subsónico, la mayor parte de la variación de la presión de estancamiento es atribuida a perdidas viscosas. Pero a grandes velocidades, en flujo supersónico la mayoría de las perdidas son producidas por la onda de choque. El coeficiente de pérdida de entalpia puede ser escrito como:

$$\zeta_{sh} = 1 - \frac{1 - (p_{2,\infty} / p_{02,\infty})^{(k-1)/k}}{1 - (p_{2,\infty} / p_{01})^{(k-1)/k}}$$

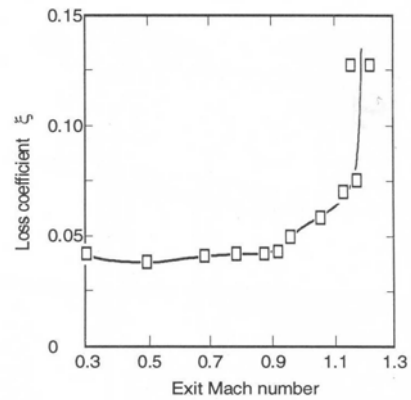
Mee el a.(1991) midió en gran incremento de las perdidas en el borde de fuga, y se dio cuenta de que estas perdidas estaban altamente asociadas a la capa límite de choque. La onda de choque produce un aumento de presión repentino, lo que desacelera el flujo y separa la capa límite lo que produce gran cantidad de



## Pérdidas de Choque

---

El efecto sobre el desempeño de la etapa se ve claramente en la siguiente gráfica:



El número de Mach crítico es el número de Mach a la salida del álabe cuando el flujo en la garganta se vuelve sónico.

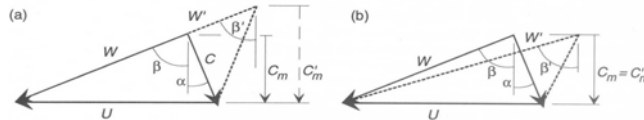
---

## Diseño de Turbinas

## Objetivos de diseño

Usando los triángulos de velocidad ahora es posible ver los factores mas importantes de los que depende el diseño de una turbina. Antes de comenzar debemos tener en cuenta las siguientes suposiciones:

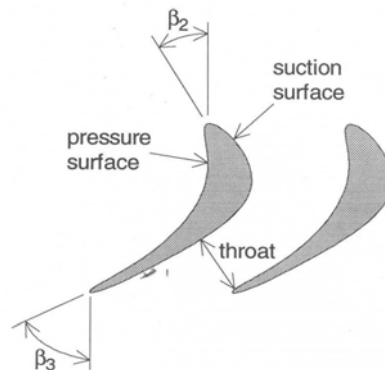
- La velocidad axial del flujo es asumida constante
- La velocidad  $U$  de los álabes es limitada por razones de resistencia de materiales. Los diseñadores trabajan generalmente con un máximo valor de  $U$  predefinido.
- Si aumentamos la velocidad  $C_m$ , ver (a), aumentara la velocidad relativa al rotor en la entrada y salida de la rejilla, lo que se traducirá en aumento de perdidas por fricción. Sin embargo se debe hacer un compromiso entre máxima eficiencia y trabajo específico lo cual se logra con altos números de Mach ( $M=0.8$  aprox.)
- Si la deflexión de flujo  $\epsilon=(\beta_2-\beta_3)$  aumenta, ver (b), la velocidad relativa y en consecuencia las perdidas por fricción. Sin embargo en algunos diseños la deflexión puede ser superior a  $100^\circ$



## Objetivos de diseño

Los principales objetivos que se deben trazar antes de comenzar el diseño son los siguientes:

- Los ángulos de entrada y salida del álabes deben estar correctamente alineados con los ángulos de velocidad relativa del flujo a la entrada y salida. Sin embargo una alineación perfecta será imposible ya que existen diferencias de presiones en el flujo que crean una incidencia y desviación en el flujo, por lo que se debe diseñar para tomando en cuenta este fenómeno.
- La garganta (throat) debe ser dimensionada para dejar pasar el flujo másico requerido. Para hacer esto se deben tomar en cuenta el número de Mach máximo posible.
- Se debe poseer una reducción suave del área hasta la garganta para acelerar el flujo (tobera)



## Objetivos de diseño

Es importante recordar que el principal objetivo es maximizar la eficiencia de la etapa. Sin embargo la eficiencia de la turbina solo será conocida cuando la máquina sea construida y probada. Existen numerosos métodos para calcular analíticamente la eficiencia de la turbina, los cuales no son totalmente exactos, pero sí lo suficiente como para poseer un punto de partida para el diseño. Por lo que el diseñador requiere correlacionar la eficiencia con parámetros de diseño.

Una forma comúnmente de presentar gráficos de eficiencia en etapas es en función de el factor de carga y factor de flujo.

$$\phi = \frac{C_x}{U}$$

$$\psi = \frac{\Delta h_o}{U_2^2}$$

*El factor de carga es una medida de la potencia de salida en la etapa por unidad de masa. El factor de flujo es relacionado directamente con la velocidad axial, el flujo másico y tamaño de la etapa*

## Objetivos de diseño

Una correlación conocida ampliamente es la fabricada por **Smith (1965)** de la prueba de **70 modelos de turbinas**. Esta grafica esta hecha para turbinas que se mantengan en el siguiente margen:

- Velocidad axial constante
- Grado de reacción entre 0.2 y 0.6
- Relación de aspecto (altura/cuerda) de 3 a 4

Las eficiencias mostradas no toman algunos tipos de perdida, por lo que encontraremos eficiencia mayores a las que obtendremos en la realidad. El gráfico muestra tendencias, y ha sido comprobado por Craig y Cox (1970) y Kacher y Okapuu (1882) que posee gran precisión y es muy útil para seleccionar factores de carga y flujo.

Desafortunadamente según el gráfico para obtener gran eficiencia debemos tener bajos factores de carga y flujo bajos, lo que se traduce en gran numero de etapas y álabes de gran altura por lo que serán mas costosos.

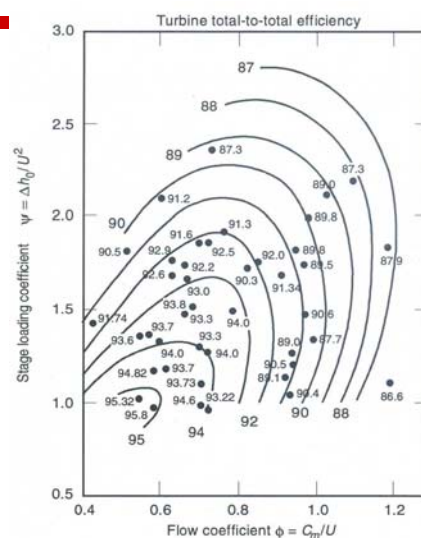


Gráfico de Smith

## Objetivos de diseño

Sin embargo diseños modernos han avanzado al punto que poseen etapas con factores de carga de 2 y factores de flujo alrededor de 0.8, generando gran eficiencia.

Una vez factor de flujo, carga y reacción han sido escogidos, podemos seguir con los ángulos de los álabes. De la ecuación de Euler:

$$\psi = \phi(\tan \beta_2 - \tan \beta_3)$$

- Para turbinas multietapas:

$$C_p(T_1 - T_3) = C_p(T_{01} - T_{03}) = U \cdot C_m(\tan \beta_2 - \tan \beta_3)$$

- Debido a que la entalpía de estancamiento se mantiene constante en el rotor:

$$C_p(T_2 - T_3) = \frac{1}{2}(W_3^2 - W_2^2) = \frac{1}{2}C_m^2(\tan^2 \beta_3 - \tan^2 \beta_2)$$

## Objetivos de diseño

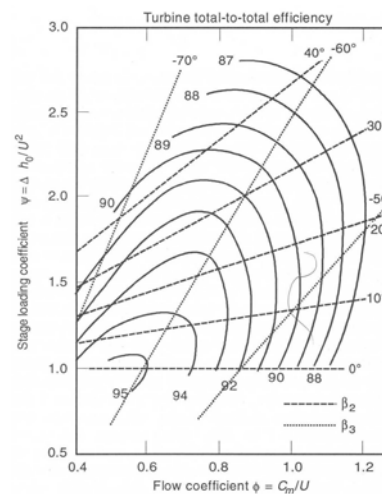
$$R = \frac{1}{2}\phi(\tan \beta_3 - \tan \beta_2) \rightarrow \text{Grado de reacción}$$

$$\tan \beta_2 = \frac{(\psi - 2 \cdot R)}{2 \cdot \phi}$$

De las ecuaciones anteriores tenemos..

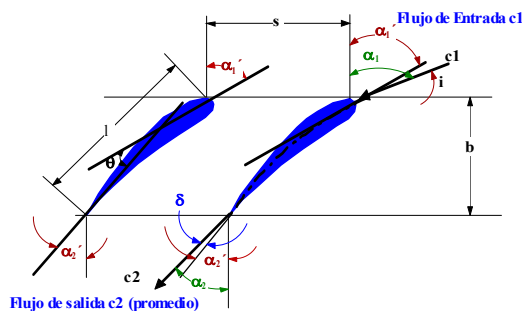
$$\tan \beta_3 = \frac{-(\psi + 2 \cdot R)}{2 \cdot \phi}$$

Este gráfico muestra el cuadro de Smith con líneas de  $\beta_2$  y  $\beta_3$  constantes superpuestas para una turbina de grado de reacción 0.5. Se puede observar que grandes factores de carga son encontrados con un ángulo  $\beta_3$  entre 60° y 70° y valores de  $\beta_2$  mayores a 40°, lo que quiere decir que para altos factores de carga se requieren grandes deflexiones de flujo.



## Configuración del perfil del álabe

Luego de haber seleccionado velocidad del álabe, grado de reacción, factor de flujo y trabajo, la tarea que continua para el diseñador es establecer el perfil del álabe que sea compatible, y satisfaga la incidencia, desviación, tamaño de garganta y criterio de contracción de diseño.

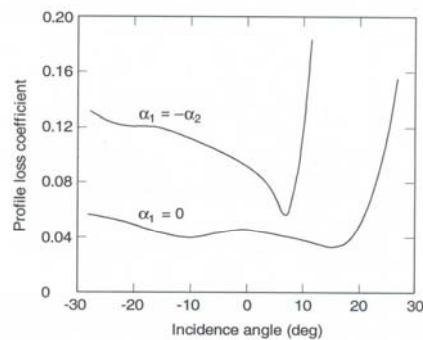


$b$  = cuerda axial  
 $l$  = cuerda  
 $\alpha_1'$  = ángulo tangente línea de centros en la entrada  
 $\alpha_2'$  = ángulo tangente línea de centros en la salida  
 $\alpha_1$  = ángulo del fluido en la entrada  
 $\alpha_2$  = ángulo del fluido en la salida  
 $i = \alpha_1 - \alpha_1'$  Incidencia  
 $S$  = Paso (distancia entre dos alabes)  
 $\epsilon = \alpha_1 - \alpha_2$  Deflexión  
 $\theta = \alpha_1' - \alpha_2'$  Curvatura  
 $\delta = \alpha_2 - \alpha_2'$  Desviación

## Correlaciones de incidencia

Es importante distinguir entre los dos tipos de incidencia que existen. La incidencia de diseño o la inducida que es la diferencia entre la dirección del flujo y el ángulo del álabe en condiciones de operación de diseño. El segundo tipo de incidencia es aquel que ocurre cuando nos encontramos en otro punto de operación, el flujo másico y la velocidad axial cambian también. Poseer una incidencia bastante grande producida por estar fuera del punto de diseño causa gran cantidad de pérdidas. Sin embargo identificar estos dos tipos de incidencia no es explícito, ya que las pérdidas producidas por incidencia fuera del punto de operación se pueden mezclar con otro tipo de pérdidas.

Existen correlaciones y graficas empíricas de data experimental que ayudan a calcular las pérdidas inducidas por las diferentes incidencias, un ejemplo es el gráfico de Ainley Matheison (1951)



## Correlaciones de desviación

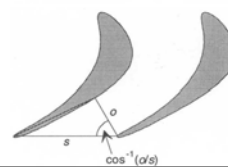
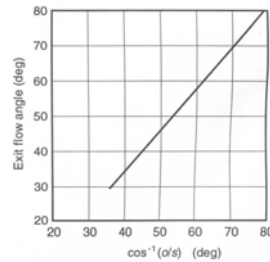
La desviación es un importante influencia en el desempeño de la etapa. Las correlaciones Ainley Matheison (1951) son todavía utilizadas. Según Ainley para grandes valores de Mach a la salida de la rejilla el ángulo de salida del flujo es función del ancho de garganta:

$$\alpha_2 = \cos^{-1}\left(\frac{0}{s}\right) \rightarrow \text{O es el ancho de garganta y s el pitch}$$

- Si se utiliza esta correlación para bajos números de Mach  $M_2 < 0.5$  la desviación calculada estará sobreestimada.

- Esta correlación esta hecha para álabes de salida recta

- Esta ecuación se puede utilizar tanto para álabes de rotor como de estator, lo único que se debe hacer cuando se utilicen la ecuación para el rotor es cambiar el ángulo absoluta  $\alpha_2$  por  $\beta_3$  y  $M_2$  por  $M_{3,rel}$



## Dimensionamiento del álabe

La optima relación de  $(s/b)$  es un compromiso. Un valor grande de esta relación significa pocos álabes, menos pérdidas por fricción y menos peso, pero habrá pérdidas debidas al desprendimiento del flujo del álabe. Un valor pequeño significa mayor cantidad de álabes y un mejor direccionamiento del flujo.

La experiencia recomienda  $o$  para pérdidas mínimas un valor de sustentación tangencial entre 0.75 y 0.85, sin embargo en diseños modernos se pueden llegar a valores mayores que 1.

Este coeficiente es conocido como criterio de Zweifel:

$$\text{Coeficiente de sustentación tangencial, } \psi_\theta = \frac{\text{Fuerza tangencial aerodinámica}}{\text{Área tangencial del álabe} \times \text{Carga dinámica de salida}}$$

Para una velocidad axial constante se reduce a..

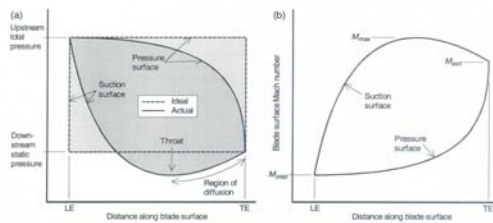
$$\psi_\theta = 2\left(\frac{s}{b}\right)\cos^2 \alpha_2 \cdot |\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2|$$

Para el rotor los ángulos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  se deben cambiar por  $\beta_2$  y  $\beta_3$

## Diseño de perfil de álabe

La forma de un álabe es relativamente compleja, en principio muchas formas satisfacen gran parte del criterio de ángulos de entrada y salida, ancho de garganta y contracción. Por lo que primero se deben definir objetivos adicionales con los que seleccionaremos finalmente el perfil más conveniente.

La distribución de presión estática alrededor del álabe posee crucial importancia, lo ideal sería que la presión sobre una superficie fuera uniforme e igual a la presión de la entrada y en la otra superficie igual a la presión de salida, lo cual físicamente no se puede hacer. La distribución de presiones de un perfil de álabe es de la siguiente forma..



Se puede observar que la garganta es el punto de presión mínima y que luego es necesario aumentar el área para alcanzar la presión de salida, esto se hace para obtener la mayor cantidad de lift

## Diseño de perfil de álabe

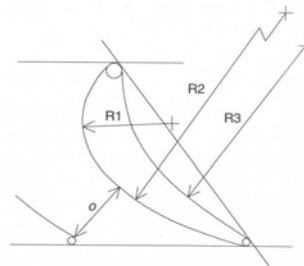
Existen muchas formas para diseñar perfiles de álabes, muchos de esas provienen de pruebas experimentales. Es muy común graficar el número de Mach en la superficie del perfil cuando se está experimentando con nuevas formas.

$$M = \sqrt{\frac{2}{k+1} \left[ \frac{p_0}{p} \frac{k-1}{k} - 1 \right]}$$

$$D_{ss} = \frac{M_{\max} - M_{\text{exit}}}{M_{\max}}$$

Recordemos que este factor de difusión se refiere a la pequeña difusión necesaria luego de haber sobre acelerado el flujo en la garganta para aprovechar aun más la sustentación.

Generalmente para dar forma al perfil del álabe se utilizan técnicas geométricas, en esta cual se crea el perfil por medio de la distribución de arcos en el plano como se muestra en el ejemplo:





## Diseño de perfil de álabe

Otra mas sencilla forma de diseñar el perfil del álabe es escoger una forma de perfil predeterminada que satisfaga los ángulos de entrada y salida de diseño. Básicamente son un conjunto de puntos que definen el perfil con respecto al camber line, a esta forma se le llama el perfil base.

Lo malo de este método es que no puedes asegurar cual será el perfil de presiones alrededor del álabe, la única forma de saberlo es en un túnel de viento. Sin embargo por medio de métodos numéricos se puede calcular la distribución de velocidades alrededor del perfil. Hay dos métodos:

- Método indirecto: se parte de un perfil supuesto en el que se calculan numéricamente el campo de velocidades del flujo alrededor de él para luego ir corrigiendo el perfil con los resultados anteriores, es un proceso iterativo.
- Método directo: requiere una especificación de desempeño para luego calcular el perfil que satisface la condición deseada

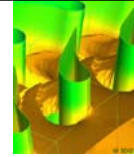
## Diseño de perfil de álabe

Actualmente existen muchos programas computacionales que permiten un estudio en tres dimensiones para cualquier tipo de flujo, por lo que el método indirecto es común mente utilizado. Es importante agregar que en este tipo de análisis se invierte mucho tiempo por lo que debemos administrarlo de buena manera, debido a que las simulaciones se logran por medio de métodos numéricos se debe prestar especial cuidado a los resultados arrojados por los programas.

Approximate date of introduction	Method	Type	Velocity triangles	Profile sections	Airfoils
1940	Hand	1D	Free vortex	Circular arcs	Radial stack
1965	Computer (batch programs)	2D inviscid flow field calculation	Free and forced vortex	Arbitrary profile	Radial stack
1975	Computer (interactive)	2D and quasi-3D inviscid flow field and coupled boundary layer solution	Any vortex	Arbitrary profile	Leaned and curved stacks
1985	Computer (interactive)	3D viscous	Full 3D analysis		

A través de la historia ha habido un desarrollo amplio en este tipo de análisis, es importante acotar que los métodos que se usaban hace 40 años aun hoy se siguen utilizando, esto se debe a que los métodos recientes no sustituyen sino que complementan el análisis, por lo que al comenzar el diseño de un perfil se parte de un análisis básico para poseer un modelo sobre el cual se hará un posterior refinamiento con programas mas avanzados.

## Diseño en tres dimensiones



Hasta ahora nada se ha dicho del flujo en 3 dimensiones en la turbina axial. Es importante tomar en cuenta que la velocidad de el álabe varia con el radio y con ella la velocidad absoluta y relativa del fluido.

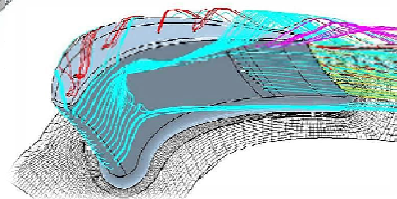
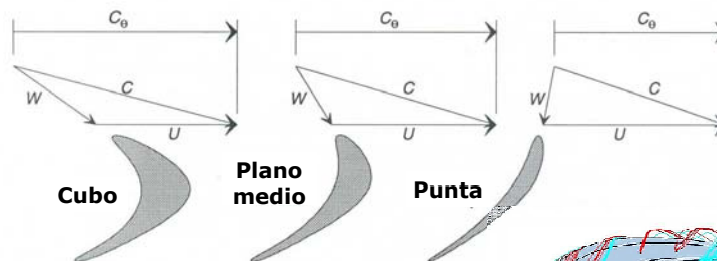
El flujo esta sometido a la ecuación de equilibrio radial, la cual relaciona las gradiente de las componentes axial, radial y tangencial de la velocidad en la dirección radial y la distribución radial de las propiedades termodinámicas del fluido. Esta es la causa del cambio de los triángulos de velocidades en la dirección radial, para compensar esto y mantener una buena desviación e incidencia el álabe debe ser torcido en la dirección radial. Sin embargo no siempre esto debe ser así, la decisión de construir un álabe torcido se toma luego de observar la relación de radios hub-tip y el hecho de que al tener un álabe torcido será mas costoso, por lo que muchas veces se sacrifica algo de eficiencia.

Existen muchas formas de solucionar esto, pero para hacerlo simple consideremos que la entalpia de estancamiento permanece constante en la dirección radial al igual que la velocidad axial. Con esta sustitución la ecuación de equilibrio radial se reduce a la ecuación de Vortex libre.

$$\frac{\partial h_0}{\partial r} = \frac{\partial C_x}{\partial r} = c_{te} \quad \longrightarrow \quad C_\theta = \frac{c_{te}}{r} \quad U = c_{te} \cdot r$$

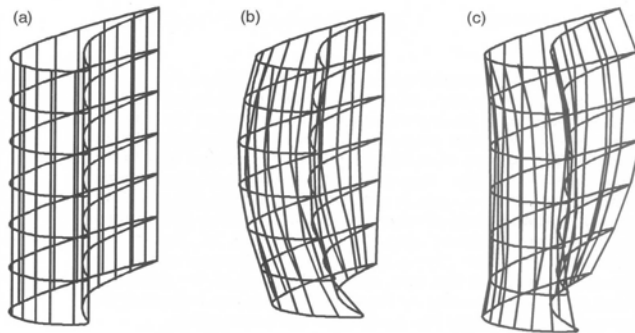
## Diseño en tres dimensiones

Los triángulos de velocidades toman la forma de la figura que se muestra. Es evidente que en el cubo hay gran deflexión y en la punta es muy poca la deflexión. Para evitar la flujo en dirección radial.

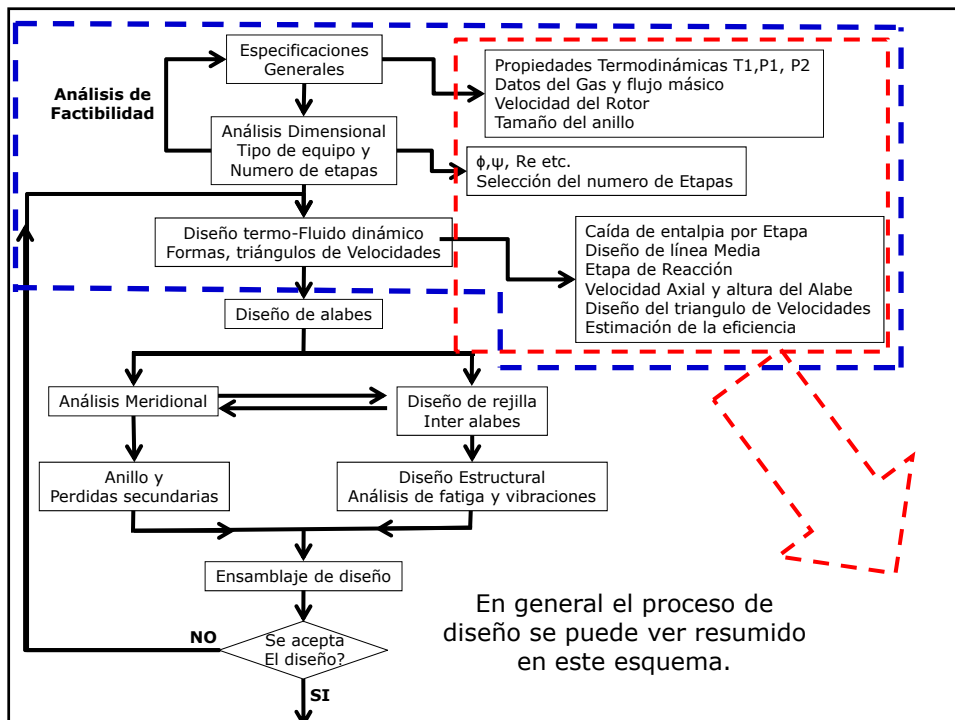


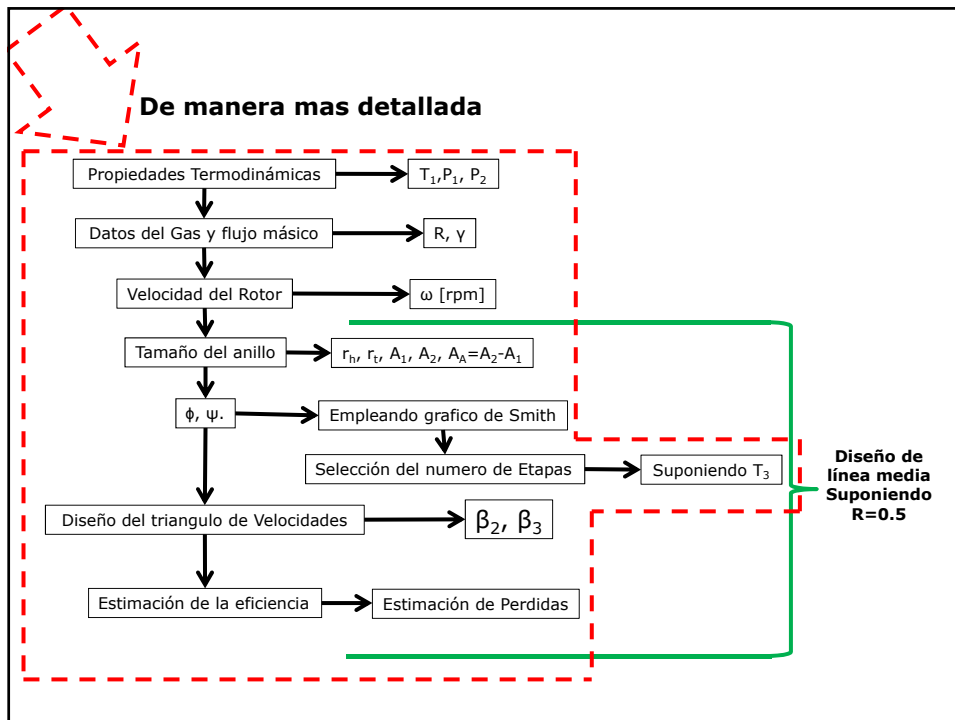
# Diseño en tres dimensiones

El diseñador debe calcular los triángulos de velocidades para cada radio. Es común hacer 3 cálculos, pero en casos complejos se pueden llegar a calcular doce triángulos, sin embargo 5 cálculos es lo común utilizado industrialmente. Luego de esto es posible hacer un diagrama del álabe tridimensional.



(a) Stack radial, (b) y (c) stack tridimensional





## Punto de Operación

Una turbomáquina esta diseñada para operar en su punto de diseño, sin embargo puede operar fuera de éste!!

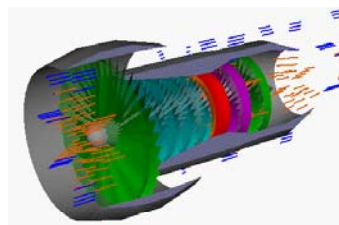
### Formas de Operación

→ Velocidad de giro constante ( $U=cte$ )

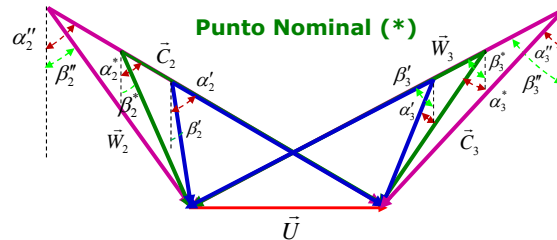
↓  
Máquina conectada a un generador

→ Velocidad de giro variable ( $U \neq cte$ )

↓  
Máquina de propulsión → Aviación



# Punto de Operación



**Condiciones:**  $U' = U'' = U^*$     $\beta_3' = \beta_3'' = \beta_3^*$     $\alpha_2' = \alpha_2'' = \alpha_2^*$     $\psi' \geq 1$

**Aumento de Potencia (")**

$$\begin{aligned} \psi'' &> \psi^* & \beta_2^* &< \beta_2'' \\ \phi'' &> \phi^* & \alpha_3^* &< \alpha_3'' \end{aligned}$$

**Disminución de Potencia (')**

$$\begin{aligned} \psi' &< \psi^* & \beta_2^* &> \beta_2' \\ \phi' &< \phi^* & \alpha_3^* &> \alpha_3' \end{aligned}$$

# Punto de Operación

Recordamos que:

$$\psi = \frac{\Delta w}{U^2} = \frac{U(Cy_2 + Cy_3)}{U^2} = \frac{Cx}{U} (tg \alpha_2 + tg \alpha_3) = \phi(tg \alpha_2 + tg \alpha_3)$$

$$\therefore \psi = \phi(tg \alpha_2 + tg \alpha_3)$$

$$Wy_3 = U + Cy_3 \Rightarrow tg \alpha_3 = tg \beta_3 - \frac{U}{Cx}$$

Combinando estas ecuaciones:

$$\psi = \phi \left( tg \alpha_2 + tg \beta_3 - \frac{U}{Cx} \right) = \phi \underbrace{(tg \alpha_2 + tg \beta_3)}_{\text{Constante!!!!}} - 1$$

Constante!!!!

## Punto de Operación

Aplicando estas expresiones para los puntos (\*) y ("):

$$\left. \begin{aligned} \psi^* &= \phi^* \underbrace{(tg \alpha_2 + tg \beta_3)}_{\text{ctte}} - 1 \\ \psi'' &= \phi'' \underbrace{(tg \alpha_2 + tg \beta_3)}_{\text{ctte}} - 1 \end{aligned} \right\} \psi'' = \phi'' \left[ \frac{\psi^* + 1}{\phi^*} \right] - 1$$

Dividiendo por  $\psi^*$ :

$$\frac{\psi''}{\psi^*} = \frac{\phi''}{\phi^*} \left[ 1 + \frac{1}{\psi^*} \right] - \frac{1}{\psi^*}$$

## Ejemplo Práctico

Dado los siguientes datos para el diseño de una turbina axial de **tres etapas**,  $R=0.5$ , calcule:

- Factor de Flujo
- Factor de Carga
- Defina el triangulo de velocidades
- Coeficiente de perdidas en el estator para una eficiencia estimada.

$$r_h = 0.3m \quad P_i = 2.5bar \quad P_f = 1.02bar \quad R = 287.0 \frac{J}{KgK}$$

$$r_i = 0.45m \quad T_i = 1200K \quad \gamma = 1.4 \quad \eta_{IT} = 92\%$$

$$\omega = 6000 rpm = 628.32 \frac{rad}{s}$$

$$Flujomassico = 35 \frac{Kg}{s}$$

## Ejemplo

Siguiendo el esquema planteado al principio de la presentación, teniendo las condiciones de entrada del equipo se procede en primer momento a calcular el factor de flujo.

$$\phi = \frac{C_x}{U} \longrightarrow \text{No se conoce } C_x \text{ ni } U$$

Para  $C_x$ :

$$\frac{dm}{dt} = \rho C_x \pi (r_i^2 - r_h^2) \quad \rho = \frac{P_i}{RT_i} = \frac{2.53 \times 10^5 \text{ Pa}}{287.0 \frac{\text{J}}{\text{KgK}} 1200 \text{ K}} = 0.7346 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$$

Despejando  $C_x$  de la ecuación de continuidad:  $\longrightarrow C_x = 134.81 \text{ m/s}$

Calculando  $U$ :

$$U = r_m \omega \longrightarrow r_m = \frac{1}{2} (r_h + r_i) = 0.375 \text{ m} \longrightarrow U = 235.62 \text{ m/s}$$

$$\phi = 0.57215$$

## Ejemplo

Para el Coeficiente de Carga:  $\psi = \frac{\Delta h_0}{U^2}$

$$\Delta h_0 = h_{0i} - h_{0f} = h_i - h_f$$

$$h_i - h_f = Cp (T_i - T_f) = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_i - T_f)$$

No se conoce  $T_3$  pero se sabe que:

$$\eta_{TT} = \frac{h_{0i} - h_{0f}}{h_{0i} - h_{0fs}} \approx \frac{h_i - h_f}{h_i - h_{fs}} = \frac{T_i - T_f}{T_i - T_{fs}}$$

Despejando  $T_3$ :  $\longrightarrow T_f = T_i - \eta_{TT} (T_i - T_{fs})$

Donde por relaciones isoentrópicas:  $T_{fs} = \left( \frac{P_{fs}}{P_i} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$

## Ejemplo

$$T_f = 950.53 K \longrightarrow \Delta h_0 = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_i - T_f) = 250.59 \frac{KJ}{Kg}$$

Para **la máquina** se tiene:

$$\Delta h_{0Etapa} = 250.59 \frac{kJ}{Kg}$$

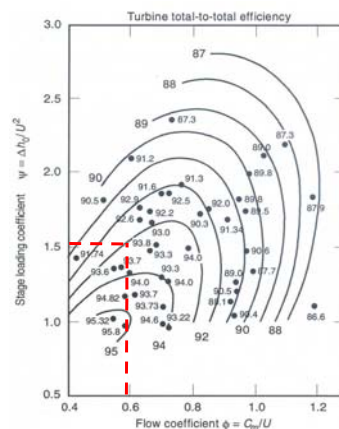
## Ejemplo

Realizando un análisis **por etapa** de la máquina:

$$\Delta h_{0Etapa} = \frac{1}{3} 250.59 \frac{kJ}{Kg} = 83.53 \frac{kJ}{Kg}$$

$$\psi = \frac{\Delta h_0}{U^2} = \frac{83530 \frac{J}{Kg}}{\left(235.62 \frac{m}{s}\right)^2} = 1.504$$

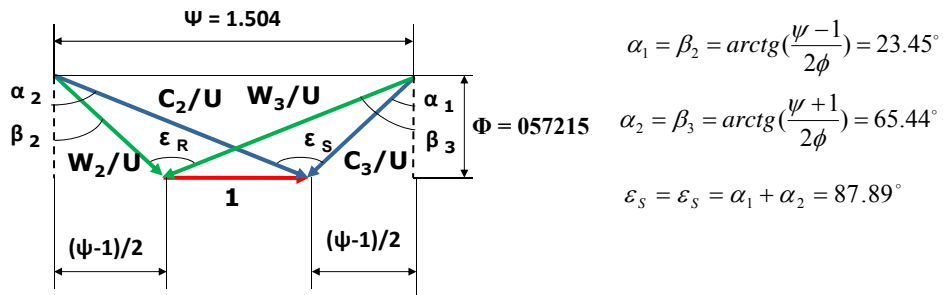
$$\phi = 0.57215$$





## Ejemplo

Con los datos obtenidos anteriormente se puede armar el siguiente triángulo de velocidades, para un **grado de reacción de 0.5**



$$\alpha_1 = \beta_2 = \arctg\left(\frac{\psi-1}{2\phi}\right) = 23.45^\circ$$

$$\alpha_2 = \beta_3 = \arctg\left(\frac{\psi+1}{2\phi}\right) = 65.44^\circ$$

$$\varepsilon_S = \varepsilon_R = \alpha_1 + \alpha_2 = 87.89^\circ$$

$$\frac{C_3}{U} = \frac{W_2}{U} = \sqrt{\phi^2 + \frac{1}{4}(\psi-1)^2} = 0.56617$$

$$\frac{C_2}{U} = \frac{W_3}{U} = \sqrt{\phi^2 + \frac{1}{4}(\psi+1)^2} = 1.3765$$

## Ejemplo

Para determinar el coeficiente de pérdidas en el estator se emplea

$$\psi = 1.504 \quad \phi = 0.57215$$

$$\eta_{TT} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\psi} \left[ \phi^2 + \frac{1}{4}(\phi^2 + 1)^2 \xi \right]} \quad \longrightarrow \quad \xi = 0.0595$$

Calculando la **Eficiencia isoentrópica por Sodeberg** se tiene que, para la etapa, ésta es de **90,18%**